

# Analiza matematyczna 2, 2016/2017

## ćwiczenia 4.

14 marca 2017

1. Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$  jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na całej prostej  $\mathbb{R}$ .
2. Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n} \sin \frac{x}{n}$  jest zbieżny jednostajnie na przedziale  $[0, 2)$ .
3. Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{2^{nx}}$  jest zbieżny jednostajnie na przedziale  $[1, 2]$ .
4. Wyznacz zbiór wartości  $x \in \mathbb{R}$ , takich że poniższy szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x^2)^n,$$

5. Obliczyć promień zbieżności szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n (n!)^3}{(3n)!} x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(n+5)5^n},$$

6. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$$

## Zadania domowe

1. Zbadaj zbieżność ciągu funkcyjnego

$$f_n(x) = \frac{(x+n)^2}{(x+n)^2 + 1}$$

na całej prostej rzeczywistej. Udowodnij, że  $f_n$  zbiega jednostajnie na odcinku  $(0, 1)$ .

2. Zbadaj zbieżność szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} (x-2)^n.$$

Możesz skorzystać z bez dowodu z faktu, że  $n! > \frac{n^n}{e^n}$ .