

Analiza matematyczna 2, 2016/2017

ćwiczenia 4. – rozwiązania

14 marca 2017

1. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2}$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na całej prostej $\mathbb{R}$.

Zauważmy, że

$$\frac{|\cos nx|}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. A ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc badany szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na całym $\mathbb{R}$ na mocy kryterium Weierstrassa.

2. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n} \sin \frac{x}{n}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, 2]$.

Zauważmy, że $\sin a \leq a$ dla $a \in [0, 2]$, a zatem

$$\frac{x^2}{n} \sin \frac{x}{n} \leq \frac{x^3}{n^2} \leq \frac{8}{n^2}.$$

A ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc badany szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na $[0, 2]$ na mocy kryterium Weierstrassa.

3. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{2^{nx}}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[1, 2]$.

Mamy $\frac{|(1-x)^n|}{2^{nx}} \leq \frac{1}{2^{2n}}$ dla $x \in [1, 2]$. A ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ jest zbieżny, więc badany szereg jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na $[1, 2]$ na mocy kryterium Weierstrassa.

4. Wyznacz zbiór wartości $x \in \mathbb{R}$, takich że poniższy szereg jest zbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n x,$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| < 1$, a zatem nasz szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $|\cos^n x| < 1$, czyli dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-x^2)^n,$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| < 1$, a zatem nasz szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $|1-x^2|^n < 1$, czyli wtedy, gdy $|1-x^2| < 1$ dla $x^2 \in (0, 2)$, czyli gdy $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

5. Obliczyć promień zbieżności szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n (n!)^3}{(3n)!} x^n,$$

Mamy $a_n = \frac{9^n (n!)^3}{(3n)!}$ oraz

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{9(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{3(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)} \rightarrow \frac{1}{3},$$

A zatem promień wynosi 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(n+5)5^n},$$

Mamy: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{(n+5)5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+5)5^n}$, dla $y = (x+1)^2$. $\sqrt[n]{\frac{1}{(n+5)5^n}} = \frac{1}{5\sqrt[n]{n+5}}$ oraz $\frac{1}{5\sqrt[n]{2n}} \leq \frac{1}{5\sqrt[n]{n+5}} \leq \frac{1}{5\sqrt[n]{n}}$, dla $n \geq 5$. A zatem na mocy tw. o trzech ciągach wiemy, że to zbiega do granicy $\frac{1}{5}$. A zatem szereg zbiega dla $y \in (-5, 5)$, czyli dla $(x+1) \in (0, \sqrt{5})$, czyli dla $x \in (-1, \sqrt{5}-1)$.

6. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$$

Mamy $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}}$, a zatem $\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 2$. A zatem promień zbieżności to $\frac{1}{2}$ i dla $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ szereg jest bezwzględnie zbieżny. Pozostaje sprawdzić, co się dzieje dla $x = \pm \frac{1}{2}$, bowiem poza tym szereg jest rozbieżny. Dla $x = -\frac{1}{2}$, mamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, który to jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Dla $x = \frac{1}{2}$, dostajemy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – rozbieżny na mocy kryterium porównawczego. A zatem szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^3}$$

Mamy $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} \rightarrow 1$, a zatem zbiega bezwzględnie dla $x \in (2-1, 2+1) = (1, 3)$. I trzeba sprawdzić dla $x = 1$ oraz $x = 3$. Dla $x = 1$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza, oraz dla $x = 3$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest zbieżny. Zatem szereg jest zbieżny dla $x \in [1, 3]$ na całym przedziale bezwzględnie.