

Analiza matematyczna 2, 2016/2017

ćwiczenia 2. – rozwiązania

28 luty 2017

1. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

Mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$, czyli ten szereg jest zbieżny.

2. Korzystając z kryterium Leibniza zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ponieważ ciąg $\frac{1}{n}$ jest nierosnący i zbieżny do 0, to szereg naprzemienny, badany wyżej, jest zbieżny.

3. Zbadaj, dla jakich wartości $x \in \mathbb{R}$, szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

jest zbieżny, a dla jakich rozbieżny?

Skorzystajmy najpierw z kryterium Cauchy'ego. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = |x|$, a zatem dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $|x| > 1$, szereg jest rozbieżny, a dla $|x| < 1$ jest zbieżny. Pozostaje przypadek ± 1 . Dla $x = 1$ dostajemy szereg harmoniczny, więc jest on rozbieżny. Dla $x = -1$ szereg z poprzedniego zadania – i jest on zbieżny. Ostatecznie dla $x \in [-1, 1)$ szereg jest zbieżny, a w przeciwnym przypadku rozbieżny.

4. Zbadaj zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

Ponieważ $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n}$, to gdyby ten szereg był zbieżny, to na mocy kryterium porównawczego, szereg harmoniczny byłby zbieżny. A nie jest, więc badany szereg też nie może być zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(3^n + 1)},$$

$\frac{2^n}{n(3^n + 1)} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ jest zbieżny, bo jest to szereg geometryczny dla $q < 1$, a zatem z kryterium porównawczego i badany szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!},$$

Stosujemy kryterium d'Alemberta: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n 3^{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{3} \rightarrow \frac{e}{3} < 1$, a zatem badany szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n},$$

Stosujemy kryterium d'Alemberta: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{2n^5} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, a zatem badany szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

Stosujemy kryterium d'Alemberta: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4} < 1$, a zatem badany szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

Ponieważ $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ jest nierosnący i zbieżny do zera, to na mocy kryterium Leibniza, badany szereg jest zbieżny.

5. Zbadaj zbieżność szeregu oraz sprawdź, czy jest on zbieżny bezwzględnie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 \cdot e^n},$$

Zauważmy, że ten szereg jest zbieżny bezwzględnie. Rzeczywiście z kryterium Cauchy'ego, bo mamy: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 e^n}} = \frac{1}{e(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$. Zatem jest również po prostu zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}},$$

Ponieważ $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ jest nierosnący i zbieżny do zera, to na mocy kryterium Leibniza, badany szereg jest zbieżny. Nie jest jednak zbieżny bezwzględnie na mocy kryterium porównawczego, bo $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \geq \frac{1}{n+1}$, a szereg harmoniczny nie jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[n]{n}}{n}.$$

Ponieważ $\frac{\sqrt[n]{n}}{n} \rightarrow 0$ i jest nierosnący, to na mocy kryterium Leibniza, badany szereg jest zbieżny. Nie jest jednak zbieżny bezwzględnie na mocy kryterium porównawczego, bo $\frac{\sqrt[n]{n}}{n} \geq \frac{1}{n}$, bo $\sqrt[n]{n} \geq 1$ a szereg harmoniczny nie jest zbieżny.

6. Oblicz sumę szeregu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 2^n + 3^n}{4^n}.$$

Zauważ, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n+3^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{22}{3}$ – korzystamy z tego, że suma granic to granica sumy i z sumy szeregu geometrycznego.