Analiza matematyczna 2, 2016/2017
ćwiczenia 1. – rozwiązania

21 luty 2017

1. Obliczając granicę ciągu sum częściowych oblicz sumę szeregu:

   - $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$,
     Zauważ, że $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, a zatem:
     $$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$
     A zatem $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.
   - szeregu geometrycznego, czyli $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, $q \in (0,1)$.
     Wiadomo, że suma pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego to:
     $$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$
     ponieważ $q < 1$, to granica tego wyrażenia to $\frac{a}{1-q}$, czyli: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$.

2. Udowodnij, że następujące szeregi nie są zbieżne:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n + \frac{1}{n}$$
   Ten szereg nie jest zbieżny, ponieważ ciąg $(-1)^n + \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny do zera. Nie jest nawet w ogóle zbieżny.
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$
   Ten szereg nie jest zbieżny, bowiem $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{n}{2n+1}\right)$$
   $a_n = \frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{n}{2n+1}$, ponieważ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ oraz arcsin jest ciągłą funkcją, to $\lim_{n\to\infty} \arcsin\frac{n}{2n+1} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. A zatem $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} > 0$, a zatem badany szereg nie jest zbieżny.
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
   Oszacujmy sumy częściowe postaci S_{2^n}. Zauważmy, że: $S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} > S_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2}$. A zatem $S_{2^n} > S_1 + \frac{n}{2}$, czyli ciąg sum częściowych jest rozbieżny, a zatem szereg nie jest zbieżny.

3. Korzystając z kryterium porównawczego wykaż, że zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
   Zauważmy, że $0 \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)}$, $n \ge 2$. Natomiast szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ jest zbieżny, bowiem $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, którego zbieżność już udowodniliśmy.

4. Korzystając z kryterium porównawczego wykaż, że zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$. Oblicz sumę tego szeregu.

   Rzeczywiście $\frac{1}{n^2+4n+3} \leq \frac{1}{n^2}$, więc szereg jest zbieżny. Sprawdźmy, jaką ma sumę. Zauważmy, że $n^2+4n+3 = (n+1)(n+3)$, a zatem $\frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{n+3}$. A zatem:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}.$$

   A zatem: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} = \frac{5}{12}$.

5. Na podstawie kryterium d'Alemberta zbadaj zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

   a zatem na mocy kryterium d'Alemberta, szereg jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2n)!}{(3n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}(2n+2)!(3n)!}{5^n(3n+3)!(2n)!} = \frac{5\cdot(2n+1)(2n+2)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \to 0 < 0,$$

   a zatem na mocy kryterium d'Alemberta, szereg jest zbieżny.