

Analiza matematyczna, 2016/2017

zadania poprawkowe – rozwiązania

12 stycznia 2017

Seria 1

1. Niech F_n będzie ciągiem Fibonacciego, czyli $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Sprawdzamy dla $n = 0$. Lewa strona to $F_0^2 = 0^2 = 0$, a prawa to $F_0 F_1 = 0 \cdot 1 = 0$, zgadza się.

Założmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, mamy $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$. Będziemy dowodzić, że

$$F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+1} F_{n+2}.$$

Korzystając z założenia, mamy:

$$F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1} (F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2},$$

gdzie ostatnia równość zachodzi na mocy definicji tego ciągu. Co było do okazania w tym kroku indukcyjnym, a zatem na mocy zasady indukcji matematycznej, $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2. Znajdź granicę ciągu $\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$. Wynik wykaż korzystając z twierdzenia o trzech ciągach.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, mamy $1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{1 + 2} = \sqrt[n]{2}$. Wiadomo, z ćwiczeń, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, a zatem z twierdzenia o trzech ciągach również $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

Seria 2

1. Policz:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 6x + 4}.$$

Ponieważ 2 jest pierwiastkiem i licznika, i mianownika, wyciągamy $(x - 2)$ przed nawias w liczniku i mianowniku, zatem:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 6x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(2x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{2x - 2} = \frac{3}{2}.$$

2. Zbadaj ciągłość funkcji:

$$f(x) = x \sin(\lfloor x \rfloor \pi + \pi/2)$$

Zauważ, że:

$$\sin(\lfloor x \rfloor \pi + \pi/2) = \begin{cases} 1 & x \in [2k, 2k + 1), k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & x \in [2k + 1, 2k + 2), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A zatem:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [2k, 2k + 1), k \in \mathbb{Z}, \\ -x & x \in [2k + 1, 2k + 2), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

W takim razie f jest ciągła dla $x \in (k, k + 1)$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. Natomiast w punktach całkowitych rozważamy granice lewo i prawostronne. Dla $2k$, $k \in \mathbb{Z}$, mamy $\lim_{x \rightarrow 2k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2k^-} -x = -2k$ oraz

$\lim_{x \rightarrow 2k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2k^+} x = 2k$, czyli funkcja jest ciągła w $2k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = 0$. Natomiast dla $2k + 1$, $\lim_{x \rightarrow 2k+1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2k+1^-} x = 2k + 1$ oraz $\lim_{x \rightarrow 2k+1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2k+1^+} -x = -2k - 1$, więc nie jest nigdy ciągła.

Ostatecznie funkcja jest ciągła w punkcie x wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cup \{0\}$.

Seria 3

Niech funkcja f będzie zadana następująco:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x+2)}{x+1} & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{x^2+2x-5}{x-5} & \text{dla } x \in [-1, \infty) \setminus \{5\} \end{cases}$$

a) Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.

Mamy $\lim_{x \rightarrow -1^-} \sin(2x+2) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow -1^-} x+1 = 0$, możemy więc zastosować regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sin(2x+2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2 \cos(2x+2)}{1} = 2.$$

b) Zbadaj ciągłość funkcji f . Czy f jest ciągła w punkcie -1 ? Odpowiedź uzasadnij.

Musimy sprawdzić prawostronną granicę w tym punkcie.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+2x-5}{x-5} = \frac{-6}{-6} = 1.$$

A zatem funkcja nie ma granicy w punkcie -1 . Nie jest więc w nim ciągła. Nie jest też ciągła w 5 , bo ten punkt leży poza dziedziną. W pozostałych punktach, czyli $\mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$ jest ciągła.

c) Policz pochodne funkcji f' na przedziałach $(-\infty, -1)$ oraz $(-1, \infty) \setminus \{5\}$. Czy f jest różniczkowalna w punkcie $x = -1$?

$$\left(\frac{\sin(2x+2)}{x+1} \right)' = \frac{2(x+1) \cos(2x+2) - \sin(2x+2)}{(x+1)^2}$$

$$\left(\frac{x^2+2x-5}{x-5} \right)' = \frac{(2x+2)(x-5) + x^2+2x-5}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x-5}{(x-5)^2}$$

Nie jest różniczkowalna w -1 , bo nie jest tam ciągła.

d) Znajdź asymptoty pionowe, poziome i ukośne funkcji f .

Wiadomo już, że f nie ma lewostronnej asymptoty pionowej w -1 . Ma za to obustronną asymptotę pionową $x = 5$, bo:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty.$$

Jest asymptota pozioma lewostronna $y = 0$, bo:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(2x+2)}{x+1} = 0,$$

bo $\sin(2x+2)$ jest ograniczony. Więc nie ma lewostronnej ukośnej.

Jest też prawostronna asymptota ukośna (więc nie ma poziomej):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-5}{x^2-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1+2/x-5/x^2)}{x^2(1-5/x)} = 1.$$

Liczmy więc:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-5-x^2+5x}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x-5}{x-5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(7-5/x)}{x(1-5/x)} = 7,$$

a zatem ta szukana asymptota to $y = x + 7$.

e) Dla $x > -1$, znajdź lokalne ekstrema oraz przedziały monotoniczności tej funkcji.

Pochodna zeruje się dla $x^2 - 10x - 5 = 0, x > -1$, czyli w $5 - \sqrt{30}$ i $5 + \sqrt{30}$ – i oba te pierwiastki łapią się w ten przedział. Zatem mamy:

- dla $x \in (-1, 5 - \sqrt{30})$, $f'(x) > 0$, czyli f rośnie
- dla $x \in (5 - \sqrt{30}, 5)$, $f'(x) < 0$, czyli f maleje
- dla $x \in (5, 5 + \sqrt{30})$, $f'(x) < 0$, czyli f maleje
- dla $x \in (5 + \sqrt{30}, \infty)$, $f'(x) > 0$, czyli f rośnie

A zatem mamy lokalne maksimum w $5 - \sqrt{30}$ i lokalne minimum w $5 + \sqrt{30}$.

f) Oblicz równanie prostej stycznej do wykresu f w punkcie $x = -\pi - 1$.

$$f(-\pi - 1) = \frac{\sin(-2\pi)}{-\pi} = 0 \text{ oraz } f'(\pi - 1) = \frac{-2\pi \cos(-2\pi) - \sin(-2\pi)}{\pi^2} = \frac{-2\pi}{\pi^2} = \frac{-2}{\pi}.$$

A zatem ta styczna dana jest wzorem:

$$y = \frac{-2}{\pi}(x + \pi + 1) + 0 = \frac{-2x}{\pi} - \frac{2(\pi + 2)}{\pi}.$$