

Analiza matematyczna, 2016/2017

sprawdzian poprawkowy – rozwiązania

7 luty 2017

Zadanie 1

Niech $a_n, n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = 11^n - 6$$

- a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $5|a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
- b) Niech $b_n = (-1)^n/a_n$. Udowodnij, korzystając z definicji, że ciąg b_n spełnia warunek Cauchy'ego.
- c) Znajdź granicę ciągu $\sqrt[n]{a_n}$. Swoją odpowiedź udowodnij korzystając z tw. o trzech ciągach.

Rozwiązanie

- a) Rzeczywiście, dla $n = 1$ mamy $a_1 = 11 - 6 = 5$ jest podzielne przez 5 – zgadza się.

Założmy teraz, że $5|a_k$. Wtedy $a_{k+1} = 11^{k+1} - 6 = 11(11^k - 6) + 66 - 6 = 11a_k + 60$ też jest podzielne przez 5 jako suma dwóch liczb podzielnych przez 5.

Co na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzi, że $5|a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. $\square$

- b) Niech $\varepsilon > 0$. Oraz niech $N \in \mathbb{N}$. Wtedy dla $n, m > N$ mamy:

$$|b_m - b_n| = |b_n| + |b_m| = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_m} = \frac{1}{11^n - 6} + \frac{1}{11^m - 6} \leq \frac{2}{11^N - 6}.$$

Możemy jednak dobrać N tak, żeby $11^N > \frac{2+6\varepsilon}{\varepsilon}$. Wtedy $(11^N - 6)\varepsilon > 2$, czyli $\frac{2}{11^N - 6} < \varepsilon$, co dowodzi warunku Cauchy'ego dla ciągu b_n . $\square$

- c) Twierdzę, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{11^n - 6} = 1$. Rzeczywiście, dla $n \geq 1$, mamy $1 \leq \sqrt[n]{11^n - 6}$, bo $1 < 11^n - 6$. Ponadto $\sqrt[n]{11^n - 6} \leq \sqrt[n]{11^n} = \sqrt[n]{11}$ oraz wiadomo z ćwiczeń, że $\sqrt[n]{a} = 1$ dla $a \geq 1$. Zatem z twierdzenia o trzech ciągach, skoro $1 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{11}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. $\square$

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{x^2 + 1} & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \\ \sin(\pi x^2) & \text{dla } x \in (0, 1] \\ \frac{2x^2 - 10}{x - 1} & \text{dla } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

- a) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.
- b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(2, 3)$.
- c) Korzystając z reguły de l'Hospitala, znaleźć:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}.$$

- d) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.
- e) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-1, 0)$, $(0, 1)$ oraz $(1, \infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach 0 oraz 1. Odpowiedź uzasadnić.
- f) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(0, \infty)$.
- g) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 1/2$.

Rozwiązanie

- a) Funkcja oczywiście jest ciągła na $(1, \infty) \cup (0, 1) \cup \bigcup_{z \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} (z, z+1)$, ponieważ na tych przedziałach jest ona złożeniem funkcji ciągłych i określonych na tych przedziałach.

Nie jest ciągła w z dla $z \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, bowiem:

$$\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^-} \frac{z}{x^2 + 1} = \frac{z}{z^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow z^+} \frac{z+1}{x^2 + 1} = \frac{z+1}{z^2 + 1},$$

a są to dwie różne liczby.

Natomiast w 0 ta funkcja jest ciągła, bowiem:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x^2 + 1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(\pi x^2) = 0.$$

oraz $f(0) = 0$.

Nie jest natomiast ciągła w 1, bowiem chociaż

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\pi x^2) = 0,$$

to:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 10}{x - 1} = -\infty.$$

Czyli ostatecznie punkty nieciągłości to ujemne liczby całkowite i 1.

- b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(1, 3)$.

Zauważam, że:

$$f(2) = \frac{-2}{1} = -2 < 0$$

oraz

$$f(3) = \frac{8}{2} = 4 > 0$$

Badana funkcja jest ciągła na przedziale $(2, 3)$. A zatem z własności Darboux ma na nim pierwiastek.

- c) Mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - 10 = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} x(x-1) = \infty$, a zatem można skorzystać z reguły de l'Hospitala, i:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 10}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{2x-1}.$$

Skoro $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x-1 = \infty$, a zatem ponownie skorzystać z reguły de l'Hospitala:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{2} = 2.$$

Czyli szukana granica to 2.

- d) Zaczynamy od asymptot pionowych. O nich wiemy już wszystko, bowiem zbadaliśmy granice w podejranych punktach, badając ciągłość. Jedyną taką asymptotą to prawostronna $x = 1$.

Mamy też lewostronną asymptotę poziomą $y = 0$ (więc nie ma ukośnej), bowiem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[x]}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2([x]/x \cdot 1/x)}{x^2(1 + 1/x^2)} = 0,$$

bowiem mianownik dąży do 1, ale licznik do 0 jako iloczyn funkcji ograniczonej (zauważ, że $0 \leq [x]/x \leq z/(z-1) \leq 1$ dla $x \in (z-1, z]$, $z \leq 0$) oraz zbieżnej do zera.

Mamy też asymptotę prawostronną ukośną (więc nie ma poziomej), bo już policzyliśmy, że:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2,$$

liczymy więc też:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 10 - 2x^2 + 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-10/x + 2)}{x(1 - 1/x)} = 2.$$

Zatem ta asymptota to $y = 2x + 2$.

- e) Jeśli $x \in (-1, 0)$, to mamy do czynienia z funkcją stałą (równą 0), więc $f'(x) = 0$.

Jeśli natomiast $x \in (0, 1)$

$$f'(x) = (\sin(\pi x^2))' = 2\pi x \cos(\pi x^2).$$

W końcu dla $x \in (1, \infty)$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 10}{x - 1} \right)' = \frac{4x(x - 1) - (2x^2 - 10)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 10}{(x - 1)^2}.$$

W punkcie 0 mamy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\pi x \cos(\pi x^2)}{1} = 0 \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala, bo $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\pi x^2) = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. A zatem f jest różniczkowalna w 0 i $f'(0) = 0$. Nie jest natomiast różniczkowalna w 1, bo jest tam nieciągła.

- f) Sprawdźmy pochodną na przedziale $(0, 1)$. $f'(x) = 2\pi x \cos(\pi x^2)$. Ponieważ na tym przedziale $x \neq 0$, to może się ona zerować tylko dla $\cos(\pi x^2) = 0$, czyli gdy $x^2 = 1/2$. A zatem dla $x = \sqrt{2}/2$ Pochodna przed tym punktem jest dodatnia, a potem zmienia znak na ujemny. Natomiast na $(1, \infty)$, pochodna się nie zeruje, bo równanie $2x^2 - 4x + 10$ nie ma rozwiązań – jest zawsze dodatnia. A zatem:

- $(0, \sqrt{2}/2)$, $f'(x) > 0$, f rośnie,
- $\sqrt{2}/2$ lokalne maksimum,
- $(\sqrt{2}/2, 1)$, $f'(x) < 0$, f maleje,
- 1 asymptota pionowa prawostronna,
- $(1, \infty)$, $f'(x) > 0$, f rośnie.

- g) Liczymy:

$$\begin{aligned} f(1/2) &= \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \\ f'(1/2) &= 2\pi/2 \cdot \cos(\pi/4) = \pi\sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

A zatem styczna to

$$y = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2} \right).$$