

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 16. – rozwiązania

27 stycznia 2017

1. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest jednostajnie ciągła na przedziale $(0, \infty)$.

Założmy przeciwnie, niech $\varepsilon = 1$ i niech $\delta = \frac{1}{2^n}$, $n > 1$ będzie taka, że dla każdych $x, y > 0$, $|x - y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| < 1$. Niech zatem $x = \frac{1}{2^n}$, oraz $y = \frac{1}{2^{n+1}}$. Wtedy $|f(x) - f(y)| = 2^n > 1$, sprzeczność.

2. Udowodnić, że funkcja $g(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na przedziale $(-1, 1)$. $\square$

Niech $\varepsilon > 0$, wtedy niech $\delta = 2\varepsilon$. Dla $x, y \in (-1, 1)$ oraz $|x - y| < \delta$ mamy $|x^2 - y^2| < |(x - y)(x + y)| < \delta \cdot 2 = \varepsilon$.
 $\square$

3. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, 1) \\ x & x \in [1, \infty) \end{cases}.$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ oraz $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, a także $f(1) = 1$, a zatem funkcja jest ciągła.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2$ oraz $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 1$, a zatem f nie jest różniczkowalna w punkcie 1. Poza tym punktem jest różniczkowalna.

4. Udowodnić wzór:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x.$$

$$\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x = \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^y - e^{-y})(e^x + e^{-x})}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \sinh(x + y).$$

5. Zbadać zbieżność ciągu:

$$a_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$$

$$a_n = \frac{n^2}{n^2} = 1, \text{ zbiega do } 1.$$

$$b_n = \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oraz } \cos 2n\pi = 1, \text{ a zatem ten ciąg nie jest ciągiem zbieżnym.}$$

6. Korzystając z Tw. Lagrange'a udowodnij, że:

$$|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|.$$

Z Tw. Lagrange'a istnieje takie $c \in (x, y)$, że $\frac{\arctg x - \arctg y}{x - y} = (\arctg)'(c) = \frac{1}{1+c^2}$. Zatem $\frac{|\arctg x - \arctg y|}{|x - y|} = \frac{1}{1+c^2} \leq$

1. Zatem $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$. $\square$

7. Korzystając z warunku Cauchy'ego zbadać zbieżność ciągu:

$$a_n = \frac{\sin 1!}{2^1} + \dots + \frac{\sin n!}{2^n}.$$

Ten ciąg spełnia warunek Cauchy'ego. Rzeczywiście jeśli $\varepsilon > \frac{1}{2^n}$, to niech $N = n$ i wtedy gdy $k > l > N$, to $|a_k - a_l| = \left| \frac{\sin k!}{2^k} + \dots + \frac{\sin(l+1)!}{2^{l+1}} \right| \leq \left| \frac{\sin k!}{2^k} \right| + \dots + \left| \frac{\sin(l+1)!}{2^{l+1}} \right| \leq \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^{l+1}} \leq \frac{1}{2^l} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$.