

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 15.

20 stycznia 2017

Zadania

1. Obliczyć granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin x}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

2. Obliczyć $(\arcsin x)''$.

3. Znaleźć ekstrema funkcji:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x$$

4. Udowodnić, że:

$$|\sin 2x - \sin 2y| \leq 2|x - y|,$$

dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Udowodnić, że:

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq \frac{1}{5}|x - y|,$$

dla każdych $x, y \in (2, \infty)$.

6. Udowodnić, że $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla każdego $x \in [-1, 1]$.

7. Udowodnić nierówności:

- a) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, dla $x > 0$,
b) $e^x > 1 + x$, dla $x < 0$,

8. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ spełnia na przedziale X warunek Lipschitza, czyli istnieje $L \in \mathbb{R}$, że dla każdych $x, y \in X$, mamy $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Udowodnij, że f jest na X jednostajnie ciągła.