

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 15. – rozwiązania

20 stycznia 2017

1. Obliczyć granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin x}$$

Ponieważ mamy do czynienia z nieoznaczonością w stylu $\frac{0}{0}$, możemy użyć reguły de l'Hospitala.

Mamy $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, a zatem $(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2 y = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$.

Zatem: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)\cos x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Zauważ, że $(1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}$.

Zatem policzmy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$. To jest nieoznaczoność postaci $\frac{0}{0}$, więc korzystamy z reguły de l'Hospitala $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1+\sin x} = 1$, a zatem $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$.

2. Obliczyć $(\arcsin x)''$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arcsin x)'' = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right)' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

3. Znaleźć ekstrema funkcji:

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x$$

$f'(x) = \cos x \cdot 2 \sin x - \sin x = \sin x (2 \cos x - 1)$, co daje 0, gdy $\sin x = 0$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$, czyli dla $x = k\pi$ oraz $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. Zauważamy, że w każdym z tych przypadków f' zmienia znak, więc mamy do czynienia z ekstremami.

4. Udowodnić, że:

$$|\sin 2x - \sin 2y| \leq 2|x - y|,$$

dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$.

Zauważam, że $(\sin 2x)' = 2 \cos 2x \leq 1 = (x)'$. Bez straty ogólności założmy, że $y > x$. ponieważ funkcja x rośnie nie wolniej niż funkcja $\sin 2x$, dostajemy tezę zadania. $\square$

5. Udowodnić, że:

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq \frac{1}{5}|x - y|,$$

dla każdych $x, y \in (2, \infty)$.

Zauważmy, że $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. dla $x \geq 2$ mamy $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5x}\right)'$. Zatem na badanym przedziale funkcja $\operatorname{arctg} x$ rośnie nie szybciej niż funkcja $\frac{1}{5x}$. $\square$

6. Udowodnić, że $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dla każdego $x \in [-1, 1]$.

Czyli pytamy o $\alpha + \beta$, gdzie $\sin \alpha = \cos \beta = x$ oraz $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in [0, \pi]$. Ponieważ $\sin \alpha = \cos \frac{\pi}{2} - \alpha$, to $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ i $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

7. Udowodnić nierówności:

a) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, dla $x > 0$,

Mamy $(\cos x)' = -\sin x$ oraz $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)' = -x$. Wiemy, że $x > \sin x$ dla $x > 0$, a zatem dla $x > 0$, funkcja $(\cos x)' > \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)'$ oraz mamy $\cos 0 = 1 - \frac{0^2}{2}$. $\square$

b) $e^x > 1 + x$, dla $x < 0$,

To pytanie jest równoważne, z tym, że $e^{-x} > 1 - x$ dla $x > 0$. $(e^{-x})' = -e^{-x} > -1 = (1 - x)'$ oraz $e^{-0} = 1 = 1 - 0$. $\square$

8. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ spełnia na przedziale X warunek Lipschitza, czyli istnieje $L \in \mathbb{R}$, że dla każdych $x, y \in X$, mamy $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Udowodnij, że f jest na X jednostajnie ciągła.

Niech $\varepsilon > 0$. Wtedy niech $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ dla $x, y \in X$, takich że $|x - y| \leq \delta$ mamy $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq L\delta = \varepsilon$. $\square$