

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 14. – rozwiązania

19 stycznia 2017

Zbadaj przebieg zmienności funkcji:

A. $f(x) = x + e^{-x}$,

a) dziedzinę i miejsca zerowe

$D_f = \mathbb{R}$, $x + e^{-x} = 0$ jeśli $e^{-x} = -x$, czyli $e^x = x$, co na pewno nie zachodzi dla ujemnych x , bo wtedy $x < 0$, a $e^x > 0$. Ale nie jest to też prawdą, dla $x \geq 0$, bo $e^0 = 1 > 0$ oraz e^x rośnie szybciej niż x , bo $(e^x)' = e^x > 1 = (x)'$. Zatem f nie ma miejsc zerowych.

b) ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziałów określoności

Funkcja jest ciągła, jako suma funkcji ciągłych.

c) asymptoty

Ponieważ funkcja jest ciągła, nie ma asymptot pionowych. Sprawdzamy asymptoty poziome:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x + e^{-x} = \infty,$$

bo $x \rightarrow \infty$ oraz $e^{-x} \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \frac{e^x}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{2} = \infty,$$

a zatem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \infty.$$

Zatem nie ma asymptot poziomych. Sprawdzamy ukośne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{xe^x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0.$$

A zatem $y = x$ jest prawostronną asymptotą ukośną.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{e^{-x}}{-x} = -\infty,$$

bowiem $e^{-x} \rightarrow \infty$ oraz $-x \rightarrow \infty$, czyli z reguły de l'Hospitala mamy j.w.

d) różniczkowalność

Funkcja jest różniczkowalna na całej prostej, i:

$$f'(x) = 1 - e^{-x}.$$

e) przedziały monotoniczności, ekstrema

$1 - e^{-x} = 0$ o ile $e^{-x} = 1$, czyli gdy $x = 0$. A zatem:

- $(-\infty, 0)$ mamy $f'(x) < 0$, a więc f maleje,
- $(0, \infty)$ mamy $f'(x) > 0$, a więc f rośnie

A zatem w punkcie $x = 0$ funkcja osiąga swoje minimum.

f) druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia

$f''(x) = e^{-x}$, jest zawsze dodatnia, więc funkcja jest wypukła i nie ma punktów przegięcia.

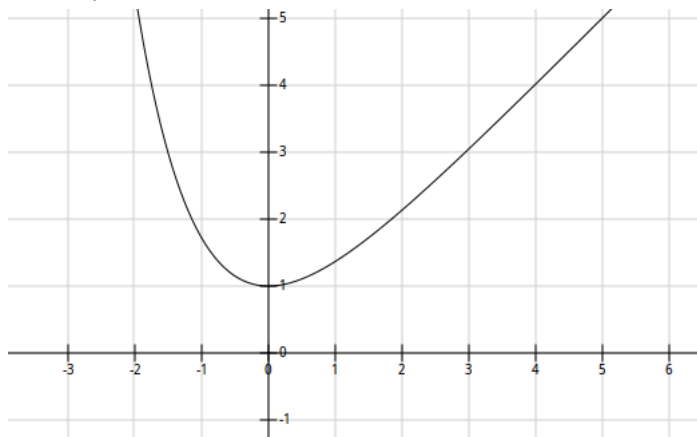
g) tabela przebiegu zmienności funkcji

	f'	f''	f
$(-\infty, 0)$	< 0	> 0	malejąca, wypukła
0	$= 0$	> 0	minimum
$(0, \infty)$	> 0	> 0	rosnąca, wypukła

h) parzystość, nieparzystość, okresowość

Funkcja nie jest parzysta, bo $f(-1) = -1 + e \neq 1 + \frac{1}{e} = f(1)$. Nie jest też nieparzysta, bo $f(-1) = -1 + e \neq -(1 + \frac{1}{e}) = -f(1)$. Oczywiście nie jest też okresowa.

i) szkic wykresu



j) przeciwdziedzina

Ponieważ $f(0) = 1$ i jest to minimum, to $R_f = (1, \infty)$.

B. $g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$,

a) dziedzinę i miejsca zerowe

Mianownik $1 - x^2 = 0$ jeśli $x \in \{-1, 1\}$. A zatem $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Ponadto $g(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

b) ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziałów określoności

Funkcja jest ciągła na przedziałach $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ oraz $(1, \infty)$.

Mamy ponadto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$$

c) asymptoty

Zatem wiadomo, że mamy asymptoty pionowe obustronne $x = -1$ i $x = 1$. Nie ma asymptot poziomych.

Sprawdzamy ukośne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x^2 - 1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1/x - x} = 0.$$

A zatem $y = -x$ jest prawostronną asymptotą ukośną.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1/x^2 - 1} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1/x - x} = 0.$$

A zatem $y = -x$ jest wręcz obustronną asymptotą ukośną.

d) różniczkowalność

Funkcja jest różniczkowalna na całej prostej, i:

$$g'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) + 2x^4}{(1-x^2)^2} = -\frac{x^2(x^2-3)}{(1-x^2)^2}.$$

e) przedziały monotoniczności, ekstrema

$x^2(x^2-3) = 0$ o ile $x = 0$ lub $x = \pm\sqrt{3}$. A zatem:

- $(-\infty, -\sqrt{3})$ mamy $g'(x) < 0$, a więc g maleje,
- $(-\sqrt{3}, -1)$ mamy $g'(x) > 0$, a więc g rośnie,
- $(-1, 0)$ mamy $g'(x) > 0$, a więc g rośnie,
- $(0, 1)$ mamy $g'(x) > 0$, a więc g rośnie,
- $(1, \sqrt{3})$ mamy $g'(x) > 0$, a więc g rośnie,
- $(\sqrt{3}, \infty)$ mamy $g'(x) < 0$, a więc g maleje.

A zatem w punkcie $x = -\sqrt{3}$ funkcja osiąga swoje lokalne minimum, a w punkcie $x = \sqrt{3}$ osiąga lokalne maksimum.

f) druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia

$$g''(x) = \left(\frac{x^2(x^2-3)}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3},$$

- $(-\infty, -1)$ mamy $g''(x) > 0$, a więc f wypukła,
- $(-1, 0)$ mamy $g''(x) < 0$, a więc f wklęsła,
- $(0, 1)$ mamy $g''(x) > 0$, a więc f wypukła,
- $(1, \infty)$ mamy $g''(x) < 0$, a więc f wklęsła.

Zatem 0 to punkt przegięcia.

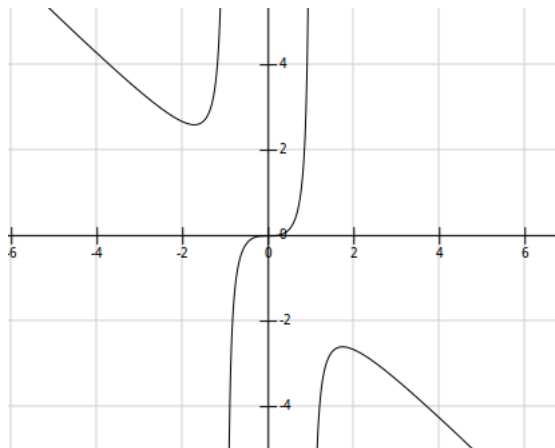
g) tabela przebiegu zmienności funkcji

	g'	g''	g
$(-\infty, -\sqrt{3})$	< 0	> 0	malejąca, wypukła
$-\sqrt{3}$	$= 0$	> 0	lokalne minimum
$(-\sqrt{3}, -1)$	> 0	> 0	rosnąca, wypukła
-1	$-$	$-$	asymptota pionowa obustronna
$(-1, 0)$	> 0	< 0	rosnąca, wklęsła
0	$= 0$	$= 0$	punkt przegięcia
$(0, 1)$	> 0	> 0	rosnąca, wypukła
1	$-$	$-$	asymptota pionowa obustronna
$(1, \sqrt{3})$	> 0	< 0	rosnąca, wklęsła
$\sqrt{3}$	$= 0$	< 0	lokalne maksimum
$(\sqrt{3}, \infty)$	< 0	< 0	malejąca, wklęsła.

h) parzystość, nieparzystość, okresowość

Funkcja jest nieparzysta, bo $f(-x) = \frac{-x^3}{(1-x^2)} = -f(x)$. Zatem nie jest parzysta, bo nie jest stała równa zero. Oczywiście nie jest też okresowa.

i) szkic wykresu



j) przeciwdziedzina

Oczywiście $R_g = \mathbb{R}$.

C. $h(x) = \ln(x^2 + 1)$.

a) dziedzinę i miejsca zerowe

$x \in D_h$, jeśli $x^2 + 1 > 0$, czyli $x^2 > -1$, czyli $D_h = \mathbb{R}$.

Natomiast $h(x) = 0$, jeśli $\ln(x^2 + 1) = 0$, czyli $x^2 + 1 = 1$, czyli $x = 0$

b) ciągłość, granice w punktach nieciągłości i na końcach przedziałów określoności

Funkcja jest ciągła, jako złożenie funkcji ciągłych.

c) asymptoty

Ponieważ funkcja jest ciągła, nie ma asymptot pionowych. Sprawdzamy asymptoty poziome:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 1) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = \infty,$$

a zatem nie ma asymptot poziomych

Zatem nie ma asymptot poziomych. Sprawdzamy ukośne:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + 1/x} = 0,$$

(skorzystaliśmy z reguły de l'Hospitala), ale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty.$$

A zatem nie ma asymptoty ukośnej prawostronnej. Analogicznie, nie ma asymptoty lewostronnej.

d) różniczkowalność

Funkcja jest różniczkowalna na całej prostej, i:

$$h'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

e) przedziały monotoniczności, ekstrema

$h'(x) = 0$, gdy $x = 0$. A zatem:

- $(-\infty, 0)$ mamy $h'(x) < 0$, a więc f maleje,
- $(0, \infty)$ mamy $h'(x) > 0$, a więc f rośnie

A zatem w punkcie $x = 0$ funkcja osiąga swoje minimum.

f) druga pochodna, wypukłość, punkty przegięcia

$$h''(x) = \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2},$$

zeruje się dla $x = \pm 1$. A zatem dla $x < -1$, $h''(x) < 0$ i funkcja jest wklęsła. Na $(-1, 1)$, $h''(x) > 0$, funkcja jest wypukła i dla $x > 1$ mamy $h''(x) < 0$ i funkcja jest wklęsła. Zatem ± 1 to punkty przegięcia.

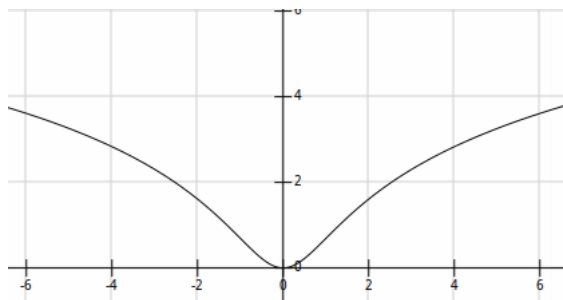
g) tabela przebiegu zmienności funkcji

	h'	h''	h
$(-\infty, -1)$	< 0	< 0	malejąca, wklęsła
-1	< 0	$= 0$	punkt przegięcia
$(-1, 0)$	< 0	> 0	malejąca, wypukła
0	$= 0$	> 0	lokalne minimum
$(0, 1)$	> 0	> 0	rosnąca, wypukła
1	> 0	$= 0$	punkt przegięcia
$(1, \infty)$	> 0	< 0	rosnąca, wklęsła.

h) parzystość, nieparzystość, okresowość

Funkcja jest parzysta, bo $f(x) = \ln(x^2 + 1) = f(-x)$, zatem skoro nie jest stała równa 0, nie jest nieparzysta. Oczywiście nie jest też okresowa.

i) szkic wykresu



j) przeciwdziedzina

Ponieważ granice w $\pm\infty$ to ∞ , a minimum to 0, mamy $R_h = [0, \infty)$.