

Analiza matematyczna, 2016/2017

sprawdzian – rozwiązania

13 stycznia 2017, godz. 8:00

Zadanie 1, wersja A

Niech a_n , $n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = \frac{n}{n+1}$.

b) Niech $A = \{a_n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + \sin n}{n^2 + \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right)^{2017n},$$

odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

a) Rzeczywiście, dla $n = 1$ mamy $a_0 = 1/(1 \cdot 2) = 1/(1+1)$ – zgadza się.

Założmy, że $a_k = k/(k+1)$ dla pewnego k , wtedy

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Co dowodzi kroku indukcyjnego. A zatem z zasady indukcji matematycznej mamy, że $a_n = \frac{n}{n+1}$. $\square$

b) Zatem $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$. Ponieważ istnieje minimum zbioru A , to $\min A = \inf A = \frac{1}{2}$. Natomiast najmniejsze ograniczenie górne to 1. Rzeczywiście, dla każdego n , $\frac{n}{n+1} < 1$ oraz jeśli $a < 1$ (założmy też, że $a > 0$), to dla $n > \frac{a}{1-a}$, mamy $\frac{n}{n+1} > a$. Rzeczywiście wtedy $n(1-a) > a$, więc $n > an + a$. Wobec tego $\sup A = 1$.

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + \sin n}{n^2 + \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right)^{2017n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\sin n}{n^2}}{1 + n^{-3/2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2017n} = 2e^{2017}$$

Skorzystaliśmy z tego, że ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zbiega do e , oraz z tego, że iloczyn ciągu organiczonego i zbieżnego do zera, zbiega do zera, czyli, że $\frac{\sin n}{n^2} \rightarrow 0$.

Zadanie 2, wersja A

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{x + \pi} & x \in \text{dla } (-\infty, -\pi) \\ \lfloor x \rfloor \pi - 1 & \text{dla } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{x-2}{x^2+x} & \text{dla } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

a) Korzystając z reguły de l'Hospitala, znaleźć:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x).$$

- b) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.
- c) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(1, 3)$.
- d) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.
- e) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty, -\pi)$, $(-\pi, -3)$ oraz $(0, \infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach $-\pi$ oraz 0 . Odpowiedź uzasadnić.
- f) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(0, \infty)$.
- g) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = -2\pi$.

Rozwiązanie

- a) Mamy $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} 2x^2 - 2\pi^2 + \sin x = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} x + \pi = 0$, a zatem można skorzystać z reguły de l'Hospitala, i:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{4x + \cos x}{1} = -4\pi - 1.$$

- b) Funkcja jest oczywiście ciągła na półprostej $(-\infty, -\pi)$. Sprawdzamy ciągłość w punkcie $-\pi$. Z poprzedniego podpunktu, wiadomo że $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = -4\pi - 1$. Natomiast $f(-\pi) = \lfloor -\pi \rfloor \pi - 1 = -4\pi - 1 = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x)$. Zatem funkcja jest ciągła w tym punkcie.

Ponadto funkcja jest ciągła na przedziałach $(-\pi, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$ i $(-1, 0)$. Nie jest natomiast ciągła w $x_0 \in \{-3, -2, -1\}$, bowiem w tych punktach $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = (x_0 - 1)\pi - 1 \neq x_0\pi - 1 = f(x_0)$.

Nie jest również ciągła w 0 , bowiem $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-2/x}{x+1} = -\infty$ i jest oczywiście ciągła na półprostej $(0, \infty)$, ponieważ cały ten przedział należy do dziedziny funkcji wymiernej.

- c) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(1, 3)$.

Zauważam, że:

$$f(3) = \frac{3-2}{9+3} = \frac{1}{12} > 0$$

oraz

$$f(1) = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2} < 0$$

Badana funkcja jest ciągła na przedziale $(1, 3)$. A zatem z własności Darboux ma na nim pierwiastek.

- d) Zaczynamy od asymptot pionowych. Jedyna szansa na to, że dla pewnej skończonej liczby c , $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$, to sytuacja, gdy c jest pierwiastkiem mianownika wyrażenia określającego f . W przypadku π już zbadaliśmy w pierwszym podpunkcie i nie ma tam asymptot. Jedyne inne pierwiastki mianownika w przedziale, to 0 i wiemy, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, a zatem $x = 0$ jest prawostronną asymptotą pionową. Sprawdźmy asymptoty poziome:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2/x}{x+1} = 0$, a zatem mamy prawostronną asymptotę poziomą $y = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2\pi^2/x + \frac{\sin x}{x}}{1 + \pi/x} = -\infty$ (korzystamy z tego, że $\sin x$ jest ograniczony). A zatem nie ma asymptoty poziomej lewostronnej.

Zostaje więc jeszcze opcja na lewostronną asymptotę ukośną. Liczymy:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{x^2 + x\pi} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 2\pi^2/x^2 + \frac{\sin x}{x^2}}{1 + \pi/x} = 2$$

(ponownie korzystamy z ograniczoności $\sin x$)

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x - 2x^2 - 2x\pi}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\pi^2/x + \frac{\sin x}{x} - 2}{1 + \pi/x} = -2$$

A zatem prosta $y = ax + b = 2x - 2$ jest lewostronną asymptotą ukośną.

e) Jeśli $x \in (-\infty, -\pi)$, to:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{x + \pi} \right)' = \frac{(4x + \cos x)(x + \pi) - (2x^2 - 2\pi^2 + \sin x)}{(x + \pi)^2} = \frac{2(x + \pi)^2 - \sin x + (x + \pi) \cos x}{(x + \pi)^2}$$

Jeśli natomiast $x \in (-\pi, -3)$

$$f'(x) = (-4\pi - 1)' = 0,$$

W końcu dla $x \in (0, \infty)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x-2}{x^2+x} \right)' = \frac{x^2+x-(2x+1)(x-2)}{(x^2+x)^2} = \frac{-x^2+4x+2}{(x^2+x)^2}$$

W punkcie $-\pi$ mamy:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x - (x + \pi)(-4\pi - 1)}{(x + \pi)^2}.$$

Ponieważ licznik i mianownik dążą do zera, stosujemy regułę de l'Hospitala i mamy:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{4x + \cos x - (-4\pi - 1)}{2(x + \pi)}.$$

Ponownie licznik i mianownik dążą do zera, stosujemy regułę de l'Hospitala i mamy:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{f(x) - f(-\pi)}{x + \pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{4 + \sin x}{2} = 2.$$

Natomiast prawostronna granica to 0, więc funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Funkcja nie może być różniczkowalna dla $x = 0$, bo nawet nie jest ciągła.

f) Widać, że jedyna możliwość zerowania się pochodnej na półprostej $(0, \infty)$, to sytuacja, gdy $-x^2 + 4x + 2 = 0$. $\Delta = 16 + 8 = 24$. $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$. Zatem $x_1 = 2 - \sqrt{6}$ oraz $x_2 = 2 + \sqrt{6}$. Ponieważ $x_1 \notin (0, \infty)$, to interesuje nas tylko x_2 . Mianownik pochodnej jest zawsze na tym przedziale dodatni i skończony. Mamy więc do rozważenia przedziały:

- $(0, 2 + \sqrt{6})$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca.
- $(2 + \sqrt{6}, \infty)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca,

A zatem mamy lokalne ekstremum: $x = 2 + \sqrt{6}$ i jest to maksimum.

g) Liczymy:

$$f(-2\pi) = \frac{8\pi^2 - 2\pi^2}{-\pi} = -6\pi$$

$$f'(-2\pi) = \frac{2\pi^2 - \pi}{\pi^2} = \frac{2\pi - 1}{\pi}$$

A zatem styczna to

$$y = \frac{2\pi - 1}{\pi}(x + 2\pi) - 6\pi = \frac{2\pi - 1}{\pi}x - 2\pi - 2.$$

Zadanie 1, wersja B

Niech a_n , $n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

b) Niech $A = \{-a_n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + \cos n}{n^2 + \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n} \right)^{2016n},$$

odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

a) Rzeczywiście, dla $n = 1$ mamy $a_0 = 1/(1 \cdot 2) = 1 - 1/(1 + 1) = 1/2$ – zgadza się.

Założmy, że $a_k = 1 - 1/(k + 1)$ dla pewnego k , wtedy

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Co dowodzi kroku indukcyjnego. A zatem z zasady indukcji matematycznej mamy, że $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. $\square$

b) Zatem $A = \{-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \dots\}$. Ponieważ istnieje maksimum zbioru A , to $\max A = \sup A = -\frac{1}{2}$. Natomiast najmniejsze ograniczenie dolne to -1 . Rzeczywiście, dla każdego n , $-1 + \frac{1}{n+1} > -1$ oraz jeśli $a > -1$ (założmy też, że $a < 0$), to dla $n > \frac{-a}{1+a}$, mamy $-1 - \frac{1}{n+1} < a$. Rzeczywiście wtedy $n(1+a) > -a$, więc $n > -an - a$. Wobec tego $\inf A = -1$.

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + \cos n}{n^2 + \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right)^{2016n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \frac{\cos n}{n^2}}{1 + n^{-3/2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2016n} = 3e^{2016}$$

Skorzystaliśmy z tego, że ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zbiega do e , oraz z tego, że iloczyn ciągu organiczonego i zbieżnego do zera, zbiega do zera, czyli, że $\frac{\cos n}{n^2} \rightarrow 0$.

Zadanie 2, wersja B

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-2}{x^2-x} & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ -[x]\pi - 1 & \text{dla } x \in [0, \pi] \\ \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{-x + \pi} & x \in \text{dla } (\pi, \infty) \end{cases}$$

a) Korzystając z reguły de l'Hospitala, znaleźć:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x).$$

b) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.

c) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-3, -1)$.

d) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

e) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(3, \pi)$ oraz (π, ∞) . Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach π oraz 0 . Odpowiedź uzasadnić.

f) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(-\infty, 0)$.

g) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 2\pi$.

Rozwiązanie

a) Mamy $\lim_{x \rightarrow \pi^+} 2x^2 - 2\pi^2 + \sin x = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow \pi^+} -x + \pi = 0$, a zatem można skorzystać z reguły de l'Hospitala, i:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{-x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{4x + \cos x}{-1} = -4\pi - 1.$$

- b) Funkcja jest oczywiście ciągła na półprostej (π, ∞) . Sprawdzamy ciągłość w punkcie π . Z poprzedniego podpunktu, wiadomo że $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = -4\pi - 1$. Natomiast $f(\pi) = -[\pi]\pi - 1 = -4\pi - 1 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$. Zatem funkcja jest ciągła w tym punkcie.

Ponadto funkcja jest ciągła na przedziałach $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ i $(3, \pi)$. Nie jest natomiast ciągła w $x_0 \in \{1, 2, 3\}$, bowiem w tych punktach $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -(x_0 + 1)\pi - 1 \neq -x_0\pi - 1 = f(x_0)$.

Nie jest również ciągła w 0, bowiem $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1-2/x}{x-1} = -\infty$ i jest oczywiście ciągła na półprostej $(-\infty, 0)$, ponieważ cały ten przedział należy do dziedziny funkcji wymiernej.

- c) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-3, -1)$.

Zauważam, że:

$$f(-3) = \frac{3-2}{9+3} = \frac{1}{12} > 0$$

oraz

$$f(-1) = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2} < 0$$

Badana funkcja jest ciągła na przedziale $(-3, -1)$. A zatem z własności Darboux ma na nim pierwiastek.

- d) Zaczynamy od asymptot pionowych. Jedyna szansa na to, że dla pewnej skończonej liczby c , $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$, to sytuacja, gdy c jest pierwiastkiem mianownika wyrażenia określającego f . W przypadku π już zbadaliśmy w pierwszym podpunkcie i nie ma tam asymptoty. Jedyny inny pierwiastek mianownika w przedziale, to 0 i wiemy, że $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, a zatem $x = 0$ jest lewostronną asymptotą pionową. Sprawdźmy asymptoty poziome:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1-2/x}{x-1} = 0$, a zatem mamy lewostronną asymptotę poziomą $y = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-2\pi^2+\sin x}{-x+\pi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-2\pi^2/x+\frac{\sin x}{x}}{-1+\pi/x} = -\infty$ (korzystamy z tego, że $\sin x$ jest ograniczony). A zatem nie ma asymptoty poziomej prawostronnej.

Zostaje więc jeszcze opcja na lewostronną asymptotę ukośną. Liczymy:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{-x^2 + x\pi} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 2\pi^2/x^2 + \frac{\sin x}{x^2}}{-1 + \pi/x} = -2$$

(ponownie korzystamy z ograniczoności $\sin x$)

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x - 2x^2 + 2x\pi}{-x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\pi^2/x + \frac{\sin x}{x} + 2}{-1 + \pi/x} = -2$$

A zatem prosta $y = ax + b = -2x - 2$ jest prawostronną asymptotą ukośną.

- e) Jeśli $x \in (\pi, \infty)$, to:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{-x + \pi} \right)' = \frac{(4x + \cos x)(-x + \pi) + (2x^2 - 2\pi^2 + \sin x)}{(x + \pi)^2} = \frac{2(-x + \pi)^2 - \sin x + (-x + \pi) \cos x}{(-x + \pi)^2}$$

Jeśli natomiast $x \in (3, \pi)$

$$f'(x) = (-4\pi - 1)' = 0,$$

W końcu dla $x \in (-\infty, 0)$:

$$f'(x) = \left(\frac{-x-2}{x^2-x} \right)' = \frac{-x^2 - x - (2x-1)(-x-2)}{(x^2-x)^2} = \frac{x^2 + 4x - 2}{(x^2-x)^2}$$

W punkcie π mamy:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x - (x - \pi)(-4\pi - 1)}{(x - \pi)^2}.$$

Ponieważ licznik i mianownik dążą do zera, stosujemy regułę de l'Hospitala i mamy:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{4x + \cos x - (-4\pi - 1)}{2(x - \pi)}.$$

Ponownie licznik i mianownik dążą do zera, stosujemy regułę de l'Hospitala i mamy:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{4 - \sin x}{2} = 2.$$

Natomiast prawostronna granica to 0, więc funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Funkcja nie może być różniczkowalna dla $x = 0$, bo nawet nie jest ciągła.

- f) Widać, że jedyna możliwość zerowania się pochodnej na półprostej $(0, \infty)$, to sytuacja, gdy $x^2 + 4x - 2 = 0$. $\Delta = 16 + 8 = 24$. $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$. Zatem $x_1 = -2 - \sqrt{6}$ oraz $x_2 = -2 + \sqrt{6}$. Ponieważ $x_2 \notin (-\infty, 0)$, to interesuje nas tylko x_1 . Mianownik pochodnej jest zawsze na tym przedziale dodatni i skończony. Mamy więc do rozważenia przedziały:

- $(-\infty, -2 - \sqrt{6}), \infty)$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca,
- $(-2 - \sqrt{6}, 0)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca.

A zatem mamy lokalne ekstremum: $x = -2 - \sqrt{6}$ i jest to minimum.

- g) Liczymy:

$$f(2\pi) = \frac{8\pi^2 - 2\pi^2}{-\pi} = -6\pi$$

$$f'(2\pi) = \frac{-2\pi^2 + \pi}{\pi^2} = \frac{1 - 2\pi}{\pi}$$

A zatem styczna to

$$y = \frac{1 - 2\pi}{\pi}(x - 2\pi) - 6\pi = \frac{1 - 2\pi}{\pi}x - 2\pi - 2.$$