

Analiza matematyczna, 2016/2017

sprawdzian B

13 stycznia 2017, godz. 8:00

Zadanie 1

Niech a_n , $n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

- a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
- b) Niech $A = \{-a_n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$
- c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + \cos n}{n^2 + \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right)^{2016n},$$

odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-2}{x^2-x} & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \\ -[x]\pi - 1 & \text{dla } x \in [0, \pi] \\ \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{-x + \pi} & x \in \text{dla } (\pi, \infty) \end{cases}$$

- a) Korzystając z reguły de l'Hospitala, znaleźć:

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x).$$

- b) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.
- c) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-3, -1)$.
- d) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.
- e) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty, 0)$, $(3, \pi)$ oraz (π, ∞) . Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach π oraz 0. Odpowiedź uzasadnić.
- f) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(-\infty, 0)$.
- g) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 2\pi$.