

Analiza matematyczna, 2016/2017

sprawdzian **A**

13 stycznia 2017, godz. 8:00

Zadanie 1

Niech a_n , $n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = \frac{n}{n+1}$.

b) Niech $A = \{a_n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + \sin n}{n^2 + \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n}\right)^{2017n},$$

odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2\pi^2 + \sin x}{x + \pi} & x \in \text{dla } (-\infty, -\pi) \\ \lfloor x \rfloor \pi - 1 & \text{dla } x \in [-\pi, 0] \\ \frac{x-2}{x^2+x} & \text{dla } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

a) Korzystając z reguły de l'Hospitala, znaleźć:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x).$$

b) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.

c) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(1, 3)$.

d) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

e) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty, -\pi)$, $(-\pi, -3)$ oraz $(0, \infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach $-\pi$ oraz 0 . Odpowiedź uzasadnić.

f) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(0, \infty)$.

g) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = -2\pi$.