

Analiza matematyczna, 2016/2017

sprawdzian – rozwiązania

13 stycznia 2017, godz. 9:45

Zadanie 1, wersja A

Niech a_n , $n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

b) Niech $A = \{a_n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt[2017]{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)^n,$$

odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

a) Rzeczywiście, dla $n = 1$ mamy $a_0 = 1/(1 \cdot 3) = 1/(2+1)$ – zgadza się.

Założmy, że $a_k = \frac{k}{2k+1}$ dla pewnego k , wtedy

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Co dowodzi kroku indukcyjnego. A zatem z zasady indukcji matematycznej mamy, że $a_n = \frac{n}{2n+1}$. $\square$

b) Zatem $A = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \dots\}$. Ponieważ istnieje minimum zbioru A , to $\min A = \inf A = \frac{1}{3}$. Natomiast najmniejsze ograniczenie górne to $1/2$. Rzeczywiście, dla każdego n , $\frac{n}{2n+1} < 1/2$ oraz jeśli $a < 1/2$ (załóżmy też, że $a > 0$), to dla $n > \frac{a}{1-2a}$, mamy $\frac{n}{2n+1} > a$. Rzeczywiście wtedy $n(1-2a) > a$, więc $n > \frac{a}{1-2a}$. Wobec tego $\sup A = 1/2$.

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt[2017]{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{(-1)^n}{n^2}}{1 + n^{-2+1/2017}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2e$$

Skorzystaliśmy z tego, że ciąg $(1 + \frac{1}{n})^n$ zbiega do e , oraz z tego, że iloczyn ciągu organiczonego i zbieżnego do zera, zbiega do zera, czyli, że $\frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow 0$.

Zadanie 2, wersja A

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2+x} & x \in \text{dla } (-\infty, 0) \setminus -1 \\ x(\sin \pi x) & \text{dla } x \in [0, 1] \\ \frac{(x - [x]) + x^2 - 1}{x} & \text{dla } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

- Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.
- Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-4, -2)$.
- Korzystając z reguły de l'Hospitala policzyć $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.
- Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty, 0) \setminus \{-1\}$, $(0, 1)$ oraz $(1, 2)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach 0 oraz 1. Odpowiedź uzasadnić.
- Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(-\infty, 0)$.
- Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 1/2$.

Rozwiązanie

- Funkcja jest oczywiście ciągła na $(-\infty, 0) \setminus -1$. Nie jest ciągła w -1 , bo ten punkt jest w ogóle poza dziedziną. Sprawdzamy ciągłość w punkcie 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+3}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+3}{x(x+1)} = -\infty.$$

A zatem na pewno nie jest ona ciągła w 0.

Jest ciągła na $(0, 1)$. Tymczasem w 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x(\sin \pi x) = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) + x^2 - 1}{x} = 0,$$

A zatem funkcja jest ciągła w 1. Jest też ciągła na $(1, \infty) \setminus \mathbb{N}$, ale dla $x_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$ mamy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{(x - (x_0 - 1)) + x^2 - 1}{x} = \frac{x_0^2}{x_0} = x_0,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{(x - x_0) + x^2 - 1}{x} = \frac{x_0^2 - 1}{x_0}.$$

A więc funkcja nie jest ciągła dla $x_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

- Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-4, -2)$.

Zauważam, że:

$$f(-4) = \frac{-4+3}{16-4} = \frac{-1}{12} < 0$$

oraz

$$f(-2) = \frac{-2+3}{4-2} = \frac{1}{2} > 0$$

Badana funkcja jest ciągła na przedziale $(-4, -2)$. A zatem z własności Darboux ma na nim pierwiastek.

- Mamy $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+3 = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2+x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1) = \infty$, więc możemy skorzystać z reguły de l'Hospitala i:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x+1} = 0.$$

- Zaczynamy od asymptot pionowych. Jedyna szansa na to, że dla pewnej skończonej liczby c , $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$, to sytuacja, gdy c jest pierwiastkiem mianownika wyrażenia określającego f . W przypadku pi już zbadaliśmy w pierwszym podpunkcie i nie ma tam asymptot. Jedyny inny pierwiastek mianownika w przedziale, to 0 i wiemy, że $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, a zatem $x = 0$ jest lewostronną asymptotą pionową. Poza tym mamy obustronną asymptotę pionową $x = -1$, bowiem:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty.$$

Sprawdźmy asymptoty poziome:

- wiemy, że $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, a zatem mamy lewostronną asymptotę poziomą $y = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \lfloor x \rfloor) + x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \lfloor x \rfloor)/x^2 + 1 - 1/x^2}{1/x} = \infty$ (korzystamy z tego, że $(x - \lfloor x \rfloor)$ jest ograniczony). A zatem nie ma asymptoty poziomej prawostronnej.

Zostaje więc jeszcze opcja na prawostronną asymptotę ukośną. Liczymy:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \lfloor x \rfloor) + x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \lfloor x \rfloor)/x^2 + 1 - 1/x^2}{1} = 1$$

(ponownie korzystamy z ograniczoności $(x - \lfloor x \rfloor)$)

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \lfloor x \rfloor) + x^2 - 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \lfloor x \rfloor) - 1}{x} = 0$$

A zatem prosta $y = ax + b = x$ jest lewostronną asymptotą ukośną.

e) Jeśli $x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$, to:

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+x} \right)' = \frac{(x^2+x) - (2x+1)(x+3)}{(x^2+x)^2} = -\frac{x^2+6x+3}{(x^2+x)^2}$$

Jeśli natomiast $x \in (0, 1)$

$$f'(x) = (x(\sin \pi x))' = \sin \pi x + x\pi \cos \pi x,$$

W końcu dla $x \in (1, 2)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x+x^2-2}{x} \right)' = \frac{(2x+1)x - (x^2+x-2)}{x^2} = \frac{x^2+2}{x^2}$$

W punkcie 1 mamy:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3,$$

więc funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Funkcja nie może być różniczkowalna dla $x = 0$, bo nawet nie jest ciągła.

f) Widać, że jedyną możliwość zerowania się pochodnej na półprostej $(-\infty, 0)$, to sytuacja, gdy $-(x^2+6x+3) = 0$. $\Delta = 36 - 12 = 24$. $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$. Zatem $x_1 = -3 - \sqrt{6}$ oraz $x_2 = -3 + \sqrt{6}$. Mianownik pochodnej jest zawsze na tym przedziale dodatni. Mamy więc do rozważenia przedziały:

- $(-\infty, -3 - \sqrt{6})$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca.
- $(-3 - \sqrt{6}, -1)$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca,
- $(-1, -3 + \sqrt{6})$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca,
- $(-3 + \sqrt{6}, 0)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca,

A zatem mamy lokalne ekstrema: $x = -3 - \sqrt{6}$ i jest to minimum oraz $x = -3 + \sqrt{6}$ i jest to maksimum.

g) Liczymy:

$$f(1/2) = 1/2$$

$$f'(1/2) = 1 + 0 = 1$$

A zatem styczna to

$$y = 1(x - 1/2) + 1/2 = x.$$

Zadanie 1, wersja B

Niech a_n , $n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1}$.

b) Niech $A = \{-a_n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$.

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + (-1)^{n+1}}{n^2 + \sqrt[2016]{n}} \cdot \left(-1 + \frac{1}{a_n}\right)^n,$$

odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

a) Rzeczywiście, dla $n = 1$ mamy $a_0 = 1/(1 \cdot 3) = 1 - 2/(2+1)$ – zgadza się.

Założmy, że $a_k = 1 - \frac{k+1}{2k+1}$ dla pewnego k , wtedy

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = 1 - \frac{k+1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \\ &= \frac{k(2k+3) + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} = 1 - \frac{k+2}{2k+3}. \end{aligned}$$

Co dowodzi kroku indukcyjnego. A zatem z zasady indukcji matematycznej mamy, że $a_n = 1 - \frac{n+1}{2n+1}$. $\square$

b) Zatem $A = \{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, \dots\}$. Ponieważ istnieje maksimum zbioru A , to $\max A = \sup A = -\frac{1}{3}$. Natomiast największe ograniczenie dolne to $-1/2$. Rzeczywiście, dla każdego n , $-1 + \frac{n+1}{2n+1} > -1/2$ oraz jeśli $a > -1/2$ (załóżmy też, że $a < 0$), to dla $n > \frac{a}{2a+1}$, mamy $-\frac{n}{2n+1} < a$. Rzeczywiście wtedy $n(1-2a) > a$, więc $n > -2an - a$. Wobec tego $\inf A = -1/2$.

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt[2016]{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}{1 + n^{-2+1/2016}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 3e$$

Skorzystaliśmy z tego, że ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ zbiega do e , oraz z tego, że iloczyn ciągu organiczonego i zbieżnego do zera, zbiega do zera, czyli, że $\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \rightarrow 0$.

Zadanie 2, wersja B

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{([x] - x) + x^2 - 1}{-x} & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ -x(\sin \pi x) & \text{dla } x \in [-1, 0] \\ \frac{-x+3}{x^2-x} & x \in \text{dla } (0, \infty) \setminus 1 \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(2, 4)$.

c) Korzystając z reguły de l'Hospitala policzyć $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

d) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

e) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ i $(0, \infty) \setminus \{1\}$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach 0 oraz -1. Odpowiedź uzasadnić.

f) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(0, \infty)$.

g) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = -1/2$.

Rozwiązanie

- a) Funkcja jest oczywiście ciągła na $(0, \infty) \setminus 1$. Nie jest ciągła w 1, bo ten punkt jest w ogóle poza dziedziną. Sprawdzamy ciągłość w punkcie 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x+3}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x+3}{x(x-1)} = -\infty.$$

A zatem na pewno nie jest ona ciągła w 0.

Jest ciągła na $(-1, 0)$. Tymczasem w -1:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} -x(\sin \pi x) = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(-1-x) + x^2 - 1}{-x} = 0,$$

A zatem funkcja jest ciągła w -1. Jest też ciągła na $(-\infty, -1) \setminus \mathbb{Z}$, ale dla $x_0 \in \{-2, -3, -4, \dots\}$ mamy:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{((x_0+1)-x) + x^2 - 1}{-x} = \frac{x_0^2}{-x_0} = -x_0,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{(x_0-x) + x^2 - 1}{-x} = \frac{x_0^2 - 1}{-x_0}.$$

A więc funkcja nie jest ciągła dla $x_0 \in \{-2, -3, -4, \dots\}$.

- b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(2, 4)$.

Zauważam, że:

$$f(4) = \frac{3-4}{16-4} = \frac{-1}{12} < 0$$

oraz

$$f(2) = \frac{3-2}{4-2} = \frac{1}{2} > 0$$

Badana funkcja jest ciągła na przedziale $(2, 4)$. A zatem z własności Darboux ma na nim pierwiastek.

- c) Mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} -x + 3 = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x(x-1) = \infty$, więc możemy skorzystać z reguły de l'Hospitala i:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x-1} = 0.$$

- d) Zaczynamy od asymptot pionowych. Jedyna szansa na to, że dla pewnej skończonej liczby c , $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$, to sytuacja, gdy c jest pierwiastkiem mianownika wyrażenia określającego f . W przypadku pi już zbadaliśmy w pierwszym podpunkcie i nie ma tam asymptot. Jedyny inny pierwiastek mianownika w przedziale, to 0 i wiemy, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, a zatem $x = 0$ jest prawostronną asymptotą pionową. Poza tym mamy obustronną asymptotę pionową $x = 1$, bowiem:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Sprawdźmy asymptoty poziome:

- wiemy, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, a zatem mamy prawostronną asymptotę poziomą $y = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{([x] - x) + x^2 - 1}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{([x])/x^2 + 1 - 1/x^2}{-1/x} = \infty$ (korzystamy z tego, że $([x] - x)$ jest ograniczony). A zatem nie ma asymptoty poziomej prawostronnej.

Zostaje więc jeszcze opcja na prawostronną asymptotę ukośną. Liczymy:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{([x] - x) + x^2 - 1}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{([x] - x)/x^2 + 1 - 1/x^2}{-1} = -1$$

(ponownie korzystamy z ograniczoności $([x] - x)$)

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{([x] - x) + x^2 - 1 - x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{([x] - x) - 1}{-x} = 0$$

A zatem prosta $y = ax + b = -x$ jest lewostronną asymptotą ukośną.

e) Jeśli $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, to:

$$f'(x) = \left(\frac{-x+3}{x^2-x} \right)' = \frac{(x^2-x) - (2x-1)(-x+3)}{(x^2-x)^2} = \frac{x^2-6x+3}{(x^2-x)^2}$$

Jeśli natomiast $x \in (-1, 0)$

$$f'(x) = (-x(\sin \pi x))' = -\sin \pi x - x\pi \cos \pi x,$$

W końcu dla $x \in (-2, -1)$:

$$f'(x) = \left(\frac{-x+x^2-2}{-x} \right)' = \frac{-(2x-1)x + (x^2-x-2)}{x^2} = -\frac{x^2+2}{x^2}$$

W punkcie -1 mamy:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -3,$$

więc funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

Funkcja nie może być różniczkowalna dla $x = 0$, bo nawet nie jest ciągła.

f) Widać, że jedyna możliwość zerowania się pochodnej na półprostej $(0, \infty)$, to sytuacja, gdy $x^2 - 6x + 3 = 0$. $\Delta = 36 - 12 = 24$. $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$. Zatem $x_1 = 3 - \sqrt{6}$ oraz $x_2 = 3 + \sqrt{6}$. Mianownik pochodnej jest zawsze na tym przedziale dodatni. Mamy więc do rozważenia przedziały:

- $(0, 3 - \sqrt{6})$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca.
- $(3 - \sqrt{6}, 1)$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca,
- $(1, 3 + \sqrt{6})$, $f'(x) < 0$, funkcja malejąca,
- $(3 + \sqrt{6}, \infty)$, $f'(x) > 0$, funkcja rosnąca.

A zatem mamy lokalne ekstrema: $x = 3 - \sqrt{6}$ i jest to maksimum oraz $x = 3 + \sqrt{6}$ i jest to minimum.

g) Liczymy:

$$f(-1/2) = 1/2$$

$$f'(-1/2) = -1$$

A zatem styczna to

$$y = -1(x + 1/2) + 1/2 = -x.$$