

Analiza matematyczna, 2016/2017

sprawdzian **A**

13 stycznia 2017, godz. 9:45

Zadanie 1

Niech a_n , $n \geq 1$, będzie zadane następująco:

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

a) Udowodnij korzystając z zasady indukcji matematycznej, że $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

b) Niech $A = \{a_n : n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$

c) Oblicz granicę:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt[2017]{n}} \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1 \right)^n,$$

odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2

Niech będzie dana następująca funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2+x} & x \in \text{dla } (-\infty, 0) \setminus \{-1\} \\ x(\sin \pi x) & \text{dla } x \in [0, 1] \\ \frac{(x - \lfloor x \rfloor) + x^2 - 1}{x} & \text{dla } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f (wskazać wszystkie punkty nieciągłości). Odpowiedź uzasadnić.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(-4, -2)$.

c) Korzystając z reguły de l'Hospitala policzyć $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

d) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

e) Obliczyć $f'(x)$ na przedziałach $(-\infty, 0) \setminus \{-1\}$, $(0, 1)$ oraz $(1, 2)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punktach 0 oraz 1. Odpowiedź uzasadnić.

f) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f na przedziale $(-\infty, 0)$.

g) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 1/2$.