

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 9. – rozwiązania

9 grudnia 2016

1. Niech a_n będzie sumą kwadratów pierwszych n liczb nieparzystych (czyli $a_n = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2$).

a) Udowodnij, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że

$$a_n = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.$$

Pierwszy krok, $n = 0$, rzeczywiście $a_0 = 0 = \frac{0 \cdot (-1)}{3}$.

Założmy, że dla pewnego k , $a_k = \frac{k(4k^2 - 1)}{3}$. Wtedy $a_{k+1} = a_k + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3} + 4k^2 + 4k + 1 = \frac{4k^3 - k + 12k^2 + 12k + 3}{3} = \frac{4k^3 + 12k^2 + 11k + 4}{3} = \frac{(k+1)(4k^2 + 8k + 3)}{3} = \frac{(k+1)(4(k+1)^2 - 1)}{3}$. Co kończy krok indukcyjny, a zatem z zasady indukcji matematycznej $a_n = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$ dla każdego n . $\square$

b) Wykaż, że ciąg $b_n = -a_n$ jest nieograniczony z dołu.

Rzeczywiście $\frac{n(4n^2 - 1)}{3} \geq \frac{n(3n^2 - 3)}{3} = n(n^2 - 1) > n$, dla $n > 1$ (bo wtedy $n^2 - 1 > 1$). Zatem dla każdej liczby rzeczywistej $x \in \mathbb{R}$ znajdzie $n \in \mathbb{N}$, takie że $-n < x$. Wtedy $b_n = -a_n < -n < x$, co dowodzi, że b_n jest nieograniczony z dołu.

c) Oblicz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 3n^3}{a_n}.$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 3n^3}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 3n^3}{\frac{n(4n^2 - 1)}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 \left(\frac{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n^3} + 3 \right)}{n^3 \left(4 - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3 \cdot (0 + 3)}{4 - 0} = \frac{9}{4}.$$

Skorzystaliśmy z tego, że zawsze:

$$0 \leq \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < 1,$$

a zatem jest to ciąg ograniczony i przemnożony przez ciąg zbieżny do 0, czyli $\frac{1}{n^3}$, iloczyn zbiega do zera.

2. Niech funkcja f będzie zadana następująco:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + 1 & \text{dla } x \in (-\infty, -6) \\ \frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} & \text{dla } x \in [-6, \infty) \setminus \{-3, 6\} \end{cases}$$

a) Sprawdzić, czy funkcja f jest ciągła w punkcie $x = -6$. Odpowiedź uzasadnić.

Mamy:

$$\lim_{x \rightarrow -6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{6}{x} + 1 = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} = \frac{18 \cdot 0}{-12 \cdot (-3)} = 0$$

a zatem granica istnieje i jest równa zero, oraz $f(-6) = 0$, zatem funkcja jest ciągła w tym punkcie.

- b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(4, 5)$.
 Mamy $f(4) = \frac{-2 \cdot 10}{-2 \cdot 7} > 0$ oraz $f(5) = \frac{7 \cdot 11}{-1 \cdot 8} < 0$, a zatem z własności Darboux istnieje punkt $c \in (4, 5)$, że $f(c) = 0$.
- c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.
 Zaczniemy od pionowych – mają szansę wystąpić tam, gdzie funkcja jest nieokreślona z powodu potencjalnego zera w mianowniku. Czyli dla $x \in \{-3, 6\}$. Rzeczywiście:

- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} = \infty$

a zatem zarówno $x = -3$, jak i $x = 6$ są obustronnymi asymptotami pionowymi.

Zbadajmy asymptoty poziome:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} + 1 = 0 + 1 = 1$, a zatem $y = 1$ jest lewostronną asymptotą poziomą.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{18}{x^2}\right) \left(1 + \frac{6}{x}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{6}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \infty$, więc nie ma prawostronnej asymptoty poziomej – to sugeruje, że trzeba tu zbadać asymptotę poziomą.

I rzeczywiście:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{18}{x^2}\right) \left(1 + \frac{6}{x}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{6}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 1$$

oraz

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 1 \cdot x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 18)(x + 6) - x(x - 6)(x + 3)}{(x - 6)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 108}{(x - 6)(x + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{108}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{6}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{3 - 0}{1 \cdot 1} = 3. \end{aligned}$$

A zatem prosta $y = x + 3$ jest szukaną prawostronną asymptotą ukośną.

- d) Obliczyć $f'(x)$ dla $x \in (-\infty, -6)$ oraz $x \in (-6, \infty) \setminus \{-3, 6\}$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punkcie $x = -6$. Odpowiedź uzasadnić.

Dla $x \in (-\infty, -6)$ mamy:

$$f'(x) = \left(\frac{6}{x} + 1\right)' = \frac{-6}{x^2},$$

a dla $x \in (-6, \infty) \setminus \{-3, 6\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{(x^2 - 18)(x + 6)}{(x - 6)(x + 3)}\right)' = \frac{(2x(x + 6) + x^2 - 18)(x - 6)(x + 3) - (x^2 - 18)(x + 6)(x + 3 - x - 6)}{(x - 6)^2(x + 3)^2} = \\ &= \frac{x^2(x^2 - 6x - 54)}{(x - 6)^2(x + 3)^2} \end{aligned}$$

Zatem w $x = -6$ mamy:

$$\lim_{x \rightarrow -6^-} \frac{f(x) - f(-6)}{x - (-6)} = \frac{-6}{36} = -\frac{1}{6},$$

zaś

$$\lim_{x \rightarrow -6^+} \frac{f(x) - f(-6)}{x - (-6)} = \frac{36 + 36 - 54}{36 \cdot 9} = \frac{5}{18}.$$

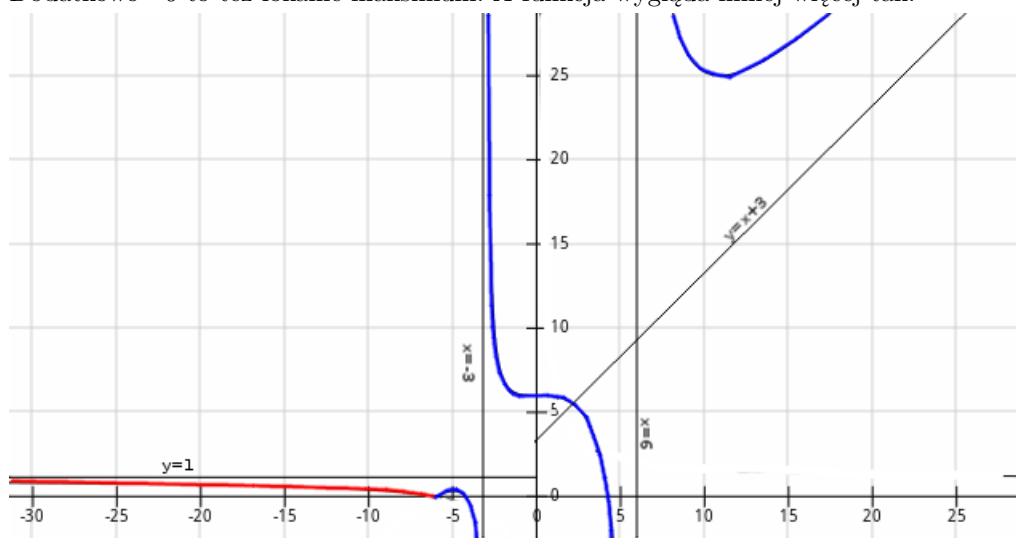
A zatem funkcja nie jest różniczkowalna w tym punkcie.

e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f .

Widać, że $f'(x) = 0$ tylko jeśli $x = 0$ lub $x^2 - 6x - 54 = 0$. W tym drugim wypadku $\Delta = 36 + 216 = 252 = 4 \cdot 63$, a zatem $x_1 = 3 - \sqrt{63}$, $x_2 = 3 + \sqrt{63}$. Poza tymi trzema kandydatami na ekstremum, pochodna może zmieniać znak w punktach, w których nie jest określona, czyli -3 oraz 6 , a także w punkcie, w którym funkcja jest nieróżniczkowalna, czyli -6 . Ponieważ $7 < \sqrt{63} < 8$, wiemy, że: $-6 < 3 - \sqrt{63} < -3 < 0 < 6 < 3 + \sqrt{63}$. A zatem mamy do zweryfikowania następujące przedziały:

- $x \in (-\infty, -6)$, to $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- $x \in (-6, 3 - \sqrt{63})$, to $f'(x) > 0$, funkcja rośnie
- $x \in (3 - \sqrt{63}, -3)$, to $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- $x \in (-3, 0)$, to $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- $x \in (0, 6)$, to $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- $x \in (6, 3 + \sqrt{63})$, to $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- $x \in (3 + \sqrt{63}, \infty)$, to $f'(x) > 0$, funkcja rośnie

A zatem 0 to nie ekstremum, za to $3 - \sqrt{63}$ to lokalne maksimum, a $3 + \sqrt{63}$ to lokalne minimum. Dodatkowo -6 to też lokalne maksimum. A funkcja wygląda mniej więcej tak:



f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = 2$.

$f'(2) = \frac{4 \cdot (-68)}{16 \cdot 25} = 2,72$ oraz $f(2) = \frac{-14 \cdot 8}{-4 \cdot 5} = \frac{28}{5} = 5,4$. A zatem styczna ma równanie:

$$y = 2,72(x - 2) + 5,4 = 2,72x - 0,44.$$

g) Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \ln x^2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot \ln x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(6+x) \ln x^2}{x}.$$

Możemy użyć reguły de l'Hospitala, bo $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6+x) \ln x^2 = -\infty$. Zatem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(6+x) \ln x^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x^2 + (6+x) 2x \frac{1}{x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln x^2 + \frac{2x \left(\frac{6}{x} + 1 \right)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln x^2 + 2 \left(\frac{6}{x} + 1 \right) \right) = \infty, \end{aligned}$$

ponieważ dla $|x| > 1$ mamy $\ln x^2 > \ln |x|$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = \infty$.