

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 8. – rozwiązania

8 grudnia 2016

1. Wyznacz równanie prostej stycznej do krzywej:

- $y = x^4$, w punkcie $x = 1$,
 $f'(x) = 4x^3$, $f'(1) = 4$, a zatem styczna to $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 1 = 4x - 3$.
- $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ w punkcie $(1, \sqrt{2})$.
Zatem: $y^2 = 4 - x^2$, czyli $y = \pm\sqrt{4 - 2x^2}$. Z tego, że $y = \sqrt{2}$ wnioskujemy, że chodzi o górną gałąź tej krzywej, czyli o wykres funkcji $f(x) = \sqrt{4 - 2x^2}$. Zatem $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{4 - 2x^2}}$. Zatem $f'(1) = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$. A zatem prosta styczna to: $y = -\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{2} = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$.

2. Oblicz pochodne funkcji:

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$$

$$f'(x) = \left(\frac{1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (x+1)}{(x-1)^2}\right) 3 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{-6(x+1)^2}{(x-1)^4}.$$

$$g(x) = 3^{\sin x}$$

$$g'(x) = \cos x 3^{\sin x} \ln 3.$$

$$h(x) = (1+x)^{\sqrt{x}}$$

Zauważ, że:

$$h(x) = e^{\ln(1+x) \cdot \sqrt{x}}$$

A zatem:

$$h'(x) = (\ln(1+x) \cdot \sqrt{x})' e^{\ln(1+x) \cdot \sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}\right) (1+x)^{\sqrt{x}}.$$

3. Korzystając z Tw. Lagrange'a udowodnij, że dla każdych liczb a, b takich, że $0 < a < b$ zachodzi:

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Niech $f(x) = \ln x$. Wtedy $f'(x) = \frac{1}{x}$. Z Tw. Lagrange'a istnieje $c \in (a, b)$, że

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = \frac{1}{c}.$$

Ponieważ $a < c < b$, to:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}.$$

A zatem:

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}.$$

Ponieważ $\ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$ oraz $b - a > 0$, to

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

□

4. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x},$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0} e^x - 1 = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, możemy zastosować regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 1}{x - 1},$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 1} x^{2015} - 1 = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$, możemy zastosować regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2015} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2015x^{2014}}{1} = \frac{2015}{1} = 2015.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$, możemy zastosować regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2},$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \infty$, możemy zastosować ponownie regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x},$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} 6x = \infty$, możemy zastosować ponownie regułę de l'Hospitala:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty.$$

5. Zbadać, jaki prostokąt ma największe pole wśród wszystkich prostokątów o obwodzie 1.

Mamy $2a + 2b = 1$, czyli $b = \frac{1-2a}{2}$, a zatem $P(a) = ab = a \frac{1-2a}{2} = -a^2 + \frac{a}{2}$. Znajdujemy kandydata na ekstremum: $P'(a) = -2a + \frac{1}{2} = 0$, czyli $a = \frac{1}{4}$. To jest maksimum lokalne, bo dla $a < \frac{1}{4}$, $P'(a) > 0$ – P rośnie, zaś dla $a > \frac{1}{4}$, $P'(a) < 0$, P maleje. A zatem maksymalne pole jest dla $a = \frac{1}{4}$ (więc $b = \frac{1}{4}$ i mamy kwadrat).