

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 10. – rozwiązania

16 grudnia 2016

1. Niech $a_n = (n-2)\pi$, $n \geq 3$.

a) Udowodnij, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że suma kątów w dowolnym n -kącie wynosi a_n . ($\pi = 180^\circ$)

Pierwszy krok, $n = 3$, rzeczywiście suma kątów w trójkącie to $\pi = a_3$.

Założmy, że dla pewnego $k \geq 3$, suma kątów w każdym k -kącie wynosi $(k-2)\pi$. Niech będzie dany $k+1$ -ką $A_0 A_1 \dots A_k$. Zauważ, że $A_0 \dots A_{k-1}$ jest k -kątem. Zatem suma kątów w nim wynosi $(k-2)\pi$. Tymczasem różni się ona od sumy kątów w $A_0 \dots A_{k-1} A_k$ o sumę kątów w trójkącie $A_{k-1} A_k A_0$, która wynosi π . Zatem $a_{k+1} = (k-2)\pi + \pi = (k+1-2)\pi$. Co kończy dowód kroku indukcyjnego $\square$

b) Niech

$$A = \left\{ \frac{\cos a_n}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\}.$$

Oblicz $\inf A$ oraz $\sup A$. Odpowiedź uzasadnij.

Zauważamy, że dla parzystych $n = 2k$ mamy $\frac{\cos a_n}{n} = \frac{\cos(2k-2)\pi}{2k} = \frac{1}{2k}$ oraz dla $n = 2k+1$ mamy $\frac{\cos a_n}{n} = \frac{\cos(2k-1)\pi}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$. A zatem dla każdego $k \geq 3$ mamy $-\frac{1}{3} \leq \frac{\cos a_n}{n} \leq \frac{1}{4}$. Ponieważ $-\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \in A$, to $\inf A = -\frac{1}{3}$, $\sup A = \frac{1}{4}$.

c) Oblicz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n \sin(a_n^2)}{5n^2 + \sqrt[3]{n}}.$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n \sin(a_n^2)}{5n^2 + \sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(4 - \frac{\sin((n-2)^2 \pi^2)}{n} \right)}{n^2 (5 + n^{-\frac{5}{3}})} = \frac{4-0}{5-0} = \frac{4}{5}$$

Skorzystaliśmy z tego, że zawsze:

$$-1 \leq \sin((n-2)^2 \pi^2) \leq 1,$$

a zatem jest to ciąg ograniczony i przemnożony przez ciąg zbieżny do 0, czyli $\frac{1}{n}$, iloczyn zbiega do zera.

2. Niech funkcja f będzie zadana następująco:

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x+3} & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \\ (1+x)^{\frac{3}{x}} & \text{dla } x \in (0, 3] \\ \frac{x^2}{x-3} - 13 & \text{dla } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

Oczywiście funkcja jest ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$. Trzeba sprawdzić, jak jest w 0 oraz 3. W 0 mamy:

$$f(0) = e^{0+3} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{3x+3} = e^{0+3} = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)^3 = e^3,$$

To ostatnie wynika stąd, że wiemy z ćwiczeń, że $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.
 Natomiast f nie jest ciągła w 3, ponieważ:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} - 13 = \infty.$$

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(8, 9)$.

Mamy $f(8) = \frac{64}{5} - 13 < 0$ oraz $f(9) = \frac{81}{6} - 13 > 0$, a zatem z własności Darboux istnieje punkt $c \in (8, 9)$, że $f(c) = 0$.

c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

Zacznijmy od pionowych – mają szansę wystąpić tam, gdzie funkcja jest nieokreślona z powodu potencjalnego zera w mianowniku. Czyli dla $x = 3$ prawostronnie (granica w zerze wiemy już, że jest skończona). Rzeczywiście:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2}{x-3} - 13 = \infty.$$

a zatem $x = 3$ jest prawostronną asymptotą poziomą.

Zbadajmy asymptoty poziome:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1})^3 = 0$, a zatem $y = 0$ jest lewostronną asymptotą poziomą.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-3} - 13 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)} - 13 = \infty$, więc nie ma prawostronnej asymptoty poziomej – to sugeruje, że trzeba tu zbadać asymptotę ukośną.

I rzeczywiście:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 3x} - \frac{13}{x} \right) = 1 - 0 = 1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + 3x}{x-3} - 13 \right) = 3 - 13 = -10.$$

A zatem prosta $y = x - 10$ jest szukaną prawostronną asymptotą ukośną.

d) Obliczyć $f'(x)$ dla $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 3)$ oraz $x \in (3, \infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$ oraz 3. Odpowiedź uzasadnić.

Dla $x \in (-\infty, 0)$ mamy:

$$f'(x) = (e^{3x+3})' = 3e^{3x+3}.$$

Dla $x \in (0, 3)$ mamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((1+x)^{\frac{3}{x}} \right)' = \left(e^{\ln(1+x) \cdot \frac{3}{x}} \right)' = \left(\ln(1+x) \cdot \frac{3}{x} \right)' e^{\ln(1+x) \cdot \frac{3}{x}} = \\ &= \left(\frac{3}{x(1+x)} - \frac{3 \ln(1+x)}{x^2} \right) (1+x)^{\frac{3}{x}}. \end{aligned}$$

I w końcu dla $x \in (3, \infty)$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-3} - 13 \right)' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

Oczywiście funkcja nie jest różniczkowalna w punkcie 3, bo nawet nie jest w nim ciągła. Za to musimy sprawdzić, co się dzieje w 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 0$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3e^3 > 0$$

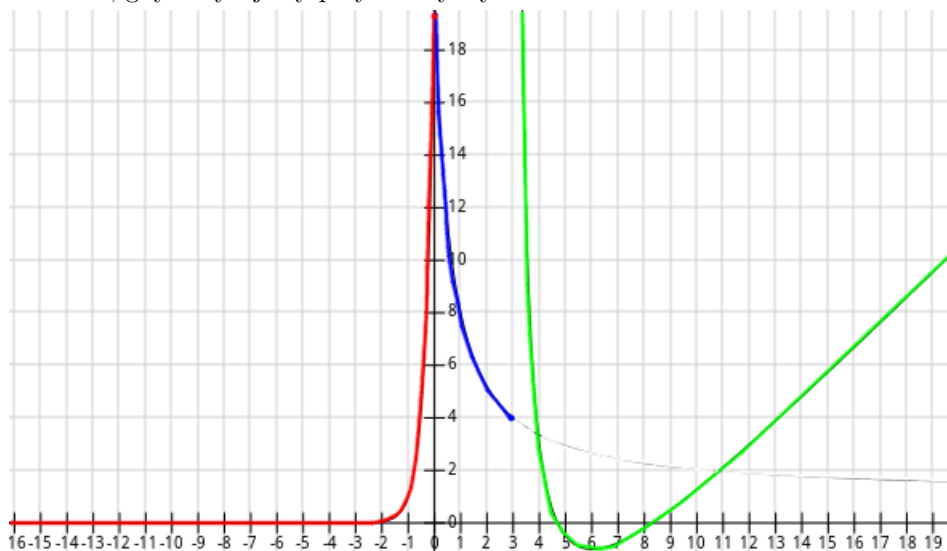
A zatem f jest nieróżniczkowalna w 0.

e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f .

Widać, że $f'(x) = 0$ tylko jeśli $x = 6$. Poza tą kandydaturą na ekstremum w punktach, w których funkcja jest nieróżniczkowalna, czyli 0 i 3. A zatem mamy do zweryfikowania następujące przedziały:

- $x \in (-\infty, 0)$, to $f'(x) > 0$, funkcja rośnie
- $x \in (0, 3)$, to $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- $x \in (3, 6)$, to $f'(x) < 0$, funkcja maleje
- $x \in (6, \infty)$, to $f'(x) > 0$, funkcja rośnie

A zatem 3 to lokalne minimum. Dodatkowo 0 to też lokalne maksimum, a 6 to także lokalne minimum, co widać, gdy narysujemy przybliżony wykres:



f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = -1$.

$f'(-1) = 3e^{-3+3} = 3$ oraz $f(-1) = e^{-3+3} = 1$. A zatem styczna ma równanie:

$$y = 3(x + 1) + 1 = 3x + 4.$$

g) Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \frac{1}{\ln x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-3) \ln x}.$$

Możemy użyć reguły de l'Hospitala, bo $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-3) \ln x = \infty$. Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-3) \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln x + \frac{1}{x}},$$

Możemy znów użyć reguły de l'Hospitala, bo $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty$ oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x + \frac{1}{x} = \infty$. Zatem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\ln x + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{x+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \infty.$$