

Analiza matematyczna, 2016/2017

ćwiczenia 10.

16 grudnia 2016

1. Niech $a_n = (n-2)\pi$, $n \geq 3$.

a) Udowodnij, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że suma kątów w dowolnym n -kącie wynosi a_n . ($\pi = 180^\circ$)

b) Niech

$$A = \left\{ \frac{\cos a_n}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \right\}.$$

Oblicz $\inf A$ oraz $\sup A$. Odpowiedź uzasadnij.

c) Oblicz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - n \sin(a_n^2)}{5n^2 + \sqrt[3]{n}}.$$

2. Niech funkcja f będzie zadana następująco:

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x+3} & \text{dla } x \in (-\infty, 0] \\ (1+x)^{\frac{3}{x}} & \text{dla } x \in (0, 3] \\ \frac{x^2}{x-3} - 13 & \text{dla } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

a) Zbadać ciągłość funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

b) Korzystając z własności Darboux, udowodnić, że funkcja f ma pierwiastek w przedziale $(8, 9)$.

c) Znaleźć asymptoty (pionowe, poziome, ukośne) funkcji f . Odpowiedź uzasadnić.

d) Obliczyć $f'(x)$ dla $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 3)$ oraz $x \in (3, \infty)$. Sprawdzić, czy f jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$ oraz 3 . Odpowiedź uzasadnić.

e) Znaleźć przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne funkcji f .

f) Obliczyć równanie prostej stycznej do f w punkcie $x = -1$.

g) Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \frac{1}{\ln x}.$$