

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019

ćwiczenia 22. – rozwiązania

18 grudnia 2018

1. Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$:

- na płaszczyznę M opisaną równaniem $2x + 3y - z = 2$,
- na prostą $L = (3, 2, -1) + \text{lin}((1, -1, 1))$

Rozwiązanie:

- Płaszczyzna M przechodzi np. przez punkt $(0, 0, -2)$, więc przesuniemy całą sytuację o wektor $(0, 0, 2)$. Wtedy M przejdzie na $T(M)$, a p na $p' = (1, 2, 3)$ i szukamy rzutu p' na $T(M)$. Wektor prostopadły do $T(M)$ to $n = (2, 3, -1)$, więc rzut p' na $T(M)$ to $r' = p' - \frac{\langle p', n \rangle}{\langle n, n \rangle} n = (1, 2, 3) - \frac{5}{14}(2, 3, -1) = \frac{1}{14}(4, 13, 47)$. Aby uzyskać wynik r , trzeba r' przesunąć z powrotem, czyli $r = r' - (0, 0, 2) = \frac{1}{14}(4, 13, 19)$.
- Przesuwamy całą sytuację o $(-3, -2, 1)$, czyli mamy zrzutować wektor $(1, 2, 1) + (-3, -2, 1) = (-2, 0, 2)$ na prostą $\text{lin}((1, -1, 1))$, czyli ten rzut to $\frac{\langle (-2, 0, 2), (1, -1, 1) \rangle}{\langle (1, -1, 1), (1, -1, 1) \rangle} (1, -1, 1) = (0, 0, 0)$. Czyli szukany punkt to $(0, 0, 0) - (-3, -2, 1) = (3, 2, -1)$.

2. Znaleźć układ równań i parametryzację:

- prostej w $\mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkty $(3, 3, 4), (1, 2, 3)$,
- płaszczyzny przechodzącej przez punkty $(3, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 1, 1)$.
- hiperpłaszczyzny przechodzącej przez punkt $(3, 2, 1, -1)$ i prostopadłej do hiperpłaszczyzny zadanej układem równań:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -9 \\ a - b + c + 2d = -4 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

- ta prosta to $(3, 3, 4) + \text{lin}((-2, -1, -1))$, czyli parametryzacja to $(3 - 2t, 3 - t, 4 - t)$. Aby znaleźć układ równań znajdujemy bazę przestrzeni rozwiązań równania $-2a - b - c = 0$. Ta baza to $\{(-2, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$. Wyrazy wolne będą więc wynosić odpowiednio: $-6 + 3 = -3$ oraz $-6 + 4 = -2$, czyli szukany układ równań to:

$$\begin{cases} -2x + y = -3 \\ -2x + z = -2 \end{cases}$$

- ta płaszczyzna to $(3, 0, 1) + \text{lin}((-1, 1, -1), (-2, 1, 0))$, czyli parametryzacja to $(3 - t - 2s, t + s, 1 - t)$. Aby znaleźć układ równań znajdujemy bazę przestrzeni rozwiązań układu równań:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli baza to $\{(1, 2, 1)\}$. Znajdujemy wyraz wolny: $3 + 1 = 4$, czyli szukane równanie to $x + 2y + z = 4$.

- w takim razie szukana płaszczyzna to $(3, 2, 1, -1) + \text{lin}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 2))$, czyli parametryzacja to: $(3 + t + s, 2 + t - s, 1 + t + s, -1 + t + 2s)$. Aby znaleźć układ równań znajdujemy bazę przestrzeni rozwiązań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

czyli baza to $\{(-3, 1, 0, 2), (-1, 0, 1, 0)\}$. Znajdujemy wyrazy wolne $-9 + 2 - 2 = -9$ i $-3 + 2 = -2$, czyli szukany układ równań, to:

$$\begin{cases} -3x + y + 2t = -9 \\ -x + z = -2 \end{cases}$$

3. Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$:

- na płaszczyznę M opisaną równaniem $x - 2y + z = 2$,
- na prostą $L = (-1, 1, 0) + \text{lin}((1, 0, 1))$

Rozwiązanie:

- Płaszczyzna M przechodzi przez punkt $(0, 0, 2)$, więc przesuniemy całą sytuację o wektor $(0, 0, -2)$. Mamy zatem rzutować punkt $(2, 3, -1)$ na płaszczyznę o równaniu $x - 2y + z = 0$. Ten rzut to:

$$(2, 3, -1) - \frac{\langle (2, 3, -1), (1, -2, 1) \rangle}{\langle (1, -2, 1), (1, -2, 1) \rangle} (1, -2, 1) = (2, 3, -1) + \frac{5}{6} (1, -2, 1) = \frac{1}{6} (17, 8, -1)$$

Przesuwamy z powrotem o wektor $(0, 0, 2)$, więc szukany wektor, to $\frac{1}{6} (17, 8, 11)$.

- Przesuwamy całą sytuację o wektor $-(-1, 1, 0) = (1, -1, 0)$. Mamy zatem rzutować punkt $(3, 2, 1)$ na prostą $\text{lin}((1, 0, 1))$. Jest to zatem:

$$\frac{\langle (3, 2, 1), (1, 0, 1) \rangle}{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 1) \rangle} (1, 0, 1) = \frac{4}{2} (1, 0, 1) = (2, 0, 2).$$

Przesuwając go z powrotem o wektor $(-1, 1, 0)$ otrzymujemy szukany wektor, czyli $(1, 1, 2)$.

4. Oblicz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}^{2017}$.

Rozwiązanie:

$$w(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda)$$

czyli wartości własne to 1, 2, 3. Obliczamy bazy przestrzeni własnych:

$$V_{(1)} : \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli baza $V_{(1)}$ to $\{(1, 0, -2)\}$.

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli baza $V_{(2)}$ to $\{(0, 0, 1)\}$.

$$V_{(3)} : \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli baza $V_{(1)}$ to $\{(1, 1, -2)\}$.

Wobec tego baza $\mathcal{A} = \{(1, 0, -2), (0, 0, 1), (1, 1, -2)\}$ jest bazą własną.

Zauważmy, że: $M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Więc:

$$\begin{aligned} A^{2017} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2017} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2017} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 + 3^{2017} & 0 \\ 0 & 3^{2017} & 0 \\ -2 - 2^{2017} & -4 - 2 \cdot 3^{2017} & 2^{2017} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5. Niech $W \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie zadane równaniem $x - y + z = 0$. Znaleźć wzór przekształcenia będącego symetrią prostopadłą względem $W^\perp$.

Rozwiązanie:

Baza W to $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Natomiast baza $W^\perp$ to $\{(1, -1, 1)\}$.

Zauważamy, że jeśli φ to szukane przekształcenie, to $\varphi((1, 1, 0)) = (-1, -1, 0)$, $\varphi((-1, 0, 1)) = (1, 0, -1)$ oraz $\varphi((1, -1, 1)) = (1, -1, 1)$, czyli $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, -1, 1)\}$ jest bazą własną dla tego przekształcenia z wartościami własnymi odpowiednio $-1, -1$ i 1 .

Łatwo wyliczyć, że $M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Czyli:

$$\begin{aligned} M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli $\varphi((x, y, z)) = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z, -2x - y - 2z, 2x - 2y - z)$.