

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019

ćwiczenia 21. – rozwiązania

13 grudnia 2018

1. Znaleźć układ równań liniowych opisujący:

- warstwę podprzestrzeni $\text{lin}((1, 3, 0, 1), (2, 9, 4, 2)) \subseteq \mathbb{R}^4$ zawierającą wektor $(1, 1, -1, 2)$,
- hiperpłaszczyznę $(1, 4, -3, 2) + \text{lin}((1, 2, 0, -3), (1, 4, -2, -3), (0, 3, -1, -2))$.

Rozwiązanie:

- Znajdujemy najpierw układ równań opisujący przestrzeń styczną:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

a więc baza przestrzeni rozwiązań tego układu równań, to $(12, -4, 3, 0), (-1, 0, 0, 1)$, czyli przestrzeń styczną opisuje układ równań:

$$\begin{cases} 12a - 4b + 3c = 0 \\ -a + d = 0 \end{cases}$$

Na podstawie przesunięcia wyliczamy wyrazy wolne, czyli odpowiednio $12 - 4 - 3 = 5$ oraz $-1 + 2 = 1$, czyli ostatecznie szukany układ to:

$$\begin{cases} 12a - 4b + 3c = 5 \\ -a + d = 1 \end{cases}$$

- Znajdujemy najpierw układ równań opisujący przestrzeń styczną:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

a więc baza przestrzeni rozwiązań tego układu równań, to $(1, 1, 1, 1)$, czyli przestrzeń styczną opisuje równanie $a + b + c + d = 0$, na podstawie przesunięcia wyliczamy wyraz wolny, czyli $1 + 4 - 3 + 2 = 4$, czyli ostatecznie szukany układ równań składa się z jednego równania: $a + b + c + d = 4$.

2. Znaleźć układ równań opisujący:

- płaszczyznę $M \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącą przez punkty $(6, 1, -3), (1, 5, 1), (1, 8, 2)$,
- prostą $L \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącą przez punkty $(1, 2, -1), (3, 4, 2)$.

Rozwiązanie:

- $M = (6, 1, -3) + \text{lin}((-5, 4, 4), (-5, 7, 5))$. I podobnie, jak poprzednio znajdujemy układ równań opisujący przestrzeń styczną:

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 4 \\ -5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

czyli baza przestrzeni rozwiązań to $(-8, 5, -15)$, czyli płaszczyzna styczna jest opisana równaniem $-8x + 5y - 15z = 0$. Z przesunięcia znajdujemy wyraz wolny: $-48 + 5 + 45 = 2$, czyli równanie $-8x + 5y - 15z = 2$ opisuje szukaną płaszczyznę.

- $M = (1, 2, -1) + \text{lin}((2, 2, 3))$. I podobnie, jak poprzednio znajdujemy układ równań opisujący przestrzeń styczną: czyli baza przestrzeni rozwiązań to $(-1, 1, 0), (-3, 0, 2)$, czyli prosta styczna jest opisana układem równań:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -3x + 2z = 0 \end{cases}$$

Z przesunięcia znajdujemy wyrazy wolne: $-1 + 2 = 1$ oraz $-3 - 2 = -5$, czyli ostatecznie szukany układ równań to:

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ -3x + 2z = -5 \end{cases}$$

3. Znaleźć parametryzację:

- prostej $L \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez $(1, 1, 5), (3, 2, 4)$,
- płaszczyzny $P \subseteq \mathbb{R}^3$ opisanej równaniem $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$,
- hiperpłaszczyzny $H \subseteq \mathbb{R}^4$ opisanej równaniem $x + y - 3z + 2t = 5$.

Rozwiązanie:

- $L = (1, 1, 5) + \text{lin}((2, 1, -1))$, czyli parametryzacja to $(1 + 2a, 1 + a, 5 - a)$.
- Rozwiązanie tego równania to $(x_1, x_2, 2x_1 + 5x_2 - 7)$ i to jest właśnie parametryzacja.
- Rozwiązanie tego równania to $(5 - y + 3z - 2t, y, z, t)$ i to jest właśnie parametryzacja.

4. Znaleźć układ równań opisujący oraz parametryzację:

- prostej $L \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $(2, 1, 1)$ i prostopadłej do płaszczyzny opisanej równaniem $3x - y + 2z = 6$,
- płaszczyzny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ przechodzącej przez punkt $(3, 0, 5)$ i prostopadłej do prostej $(1, 1, 1) + \text{lin}((2, -1, 1))$.

Rozwiązanie

- Wobec tego płaszczyzna $T(L)^\perp$ jest opisana równaniem $3x - y + 2z = 0$, czyli jest rozpięta przez wektory $(1, 3, 0), (0, 2, 1)$, a więc $T(L)$ jest opisana układem równań:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Wyrazy wolne to odpowiednio: $2 + 3 = 5$ i $2 + 1 = 3$, czyli szukany układ równań to:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

A więc parametryzacja to $(5 - 3y, y, 3 - 2y)$.

- A więc płaszczyzna $T(M)$ jest opisana równaniem $2x - y + z = 0$, a wyraz wolny w równaniu na M wynosi $6 + 5 = 11$, czyli to równanie to: $2x - y + z = 11$, a więc parametryzacja to $(x, 2x + z - 11, z)$.