

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019

ćwiczenia 21. – rozwiązania zadań domowych

13 grudnia 2018

Grupa 8:00

1. Znaleźć układ równań oraz parametryzację opisujące hiperpłaszczyznę w $\mathbb{R}^4$ przechodzącą przez punkty: $(1, 0, 1, 1), (2, 5, 3, 0), (2, 2, 1, 1), (0, 1, 2, 3)$.

Rozwiązanie:

Hiperpłaszczyzna ta, to $(1, 0, 1, 1) + \text{lin}((1, 5, 2, -1), (1, 2, 0, 0), (-1, 1, 1, 2))$. Stąd od razu mamy parametryzację:

$$\{(1 + t + u - w, 5t + 2u + w, 1 + 2t + w, 1 - t + 2w) : t, u, w \in \mathbb{R}\}.$$

Znajdujemy układ równań opisujących przestrzeń styczną:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Czyli baza współczynników to $\{(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, 3, 1)\}$, a zatem przestrzeń styczną opisuje równanie $10x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 3x_4 = 0$, wstawiamy wektor przesunięcia, czyli $10 + 9 - 3 = 16$, czyli równanie opisujące badaną hiperprzestrzeń to:

$$10x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 3x_4 = 16.$$

2. Znaleźć parametryzację płaszczyzny w $\mathbb{R}^4$ przechodzącej przez punkt $(3, 1, 2, 1)$ oraz równoległej do:

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Mamy za darmo układ równań opisujący przestrzeń styczną, jest to:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Wystarczy zatem podstawić przesunięcie, $3 + 1 - 4 + 1 = 1, 6 + 3 - 4 + 1 = 6$, aby dostać układ równań opisujący badaną płaszczyznę:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}.$$

Aby znaleźć parametryzację, trzeba rozwiązać ten układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

A zatem rozwiązanie (i parametryzacja) to:

$$\{(-3 + 4x_3 - 2x_4, 4 - 2x_3 + x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Grupa 9:45

1. Znaleźć układ równań oraz parametryzację opisujące hiperpłaszczyznę w $\mathbb{R}^4$ przechodzącą przez punkty: $(-1, 0, -1, -1), (-2, -5, -3, 0), (-2, -2, -1, -1), (0, -1, -2, -3)$.

Rozwiązanie:

Hiperpłaszczyzna ta, to $(-1, 0, -1, -1) + \text{lin}((-1, -5, -2, 1), (-1, -2, 0, 0), (1, -1, -1, -2))$. Stąd od razu mamy parametryzację:

$$\{(-1 - t - u + w, -5t - 2u - w, -1 - 2t - w, -1 + t - 2w) : t, u, w \in \mathbb{R}\}.$$

Znajdujemy układ równań opisujących przestrzeń styczną:

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Czyli baza współczynników to $\{(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, 3, 1)\}$, a zatem przestrzeń styczną opisuje równanie $10x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 3x_4 = 0$, wstawiamy wektor przesunięcia, czyli $-10 - 9 + 3 = -16$, czyli równanie opisujące badaną hiperprzestrzeń to:

$$10x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16.$$

2. Znaleźć parametryzację płaszczyzny w $\mathbb{R}^4$ przechodzącej przez punkt $(0, 1, 0, 1)$ oraz równoległej do:

$$H : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Mamy za darmo układ równań opisujący przestrzeń styczną, jest to:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Wystarczy zatem podstawić przesunięcie, $0 + 1 + 0 + 1 = 2, 0 + 3 + 0 + 1 = 4$, aby dostać układ równań opisujący badaną płaszczyznę:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}.$$

Aby znaleźć parametryzację, trzeba rozwiązać ten układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A zatem rozwiązanie (i parametryzacja) to:

$$\{(2 + 4x_3 - 2x_4, -2x_3 + x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$