

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019  
sprawdzian 2., grupa 9:45, wersja A – rozwiązania

30 listopada 2018

Uwaga: każdy napotkany układ równań należy rozwiązać metodą sprowadzania do postaci schodkowej zredukowanej.

### Zadanie 1

Niech będą dane przekształcenia  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  oraz  $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , takie że:

$$M(\psi)_{st}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\phi((x, y, z)) = (x + y, 2z),$$

oraz

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie  $\mathcal{A} = \{(4, -3), (-5, 4)\}$  i  $\mathcal{C} = \{(1, 0), (1, 1)\}$  są bazami  $\mathbb{R}^2$ , zaś  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 2, 1)\}$  jest bazą  $\mathbb{R}^3$ . Znajdź:

- a) współrzędne wektora  $\psi(v)$  w bazie  $\mathcal{C}$  dla wektora  $v = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ .
- b)  $M(\phi)_{st}^{st}$ ,
- c)  $M(id)_{st}^{\mathcal{A}}$ ,
- d)  $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{st}$ ,
- e) wzór przekształcenia  $3\psi + \phi \circ \varphi$ .

### Rozwiązanie

- a) współrzędne wektora  $\psi(v)$  w bazie  $\mathcal{C}$  dla wektora  $v = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ .

Mamy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

zatem szukane współrzędne to 4, 5.

- b)  $M(\phi)_{st}^{st}$ ,

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- c)  $M(id)_{st}^{\mathcal{A}}$ ,

$$\text{Mamy } (1, 0) = 4(4, -3) + 3(-5, 4) \text{ oraz } (1, 0) = 5(4, -3) + 4(-5, 4) \quad M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

d)  $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{st}$ ,

$$M(\phi)_{\mathcal{B}}^{st} = M(\phi)_{st}^{st} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

e) wzór przekształcenia  $3\psi + \phi \circ \varphi$ .

Wyliczamy najpierw macierz w bazach standardowych:

$$\begin{aligned} M(3\psi + \phi \circ \varphi)_{st}^{st} &= 3M(\psi)_{st}^{st} + M(\phi)_{\mathcal{B}}^{st} \cdot M(\varphi)_{st}^{\mathcal{B}} = \\ &= 3M(id)_{\mathcal{C}}^{st} \cdot M(\psi)_{st}^{\mathcal{C}} + M(\phi)_{\mathcal{B}}^{st} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(id)_{st}^{\mathcal{A}} = \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 21 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & 26 \\ 24 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 47 \\ 33 & 42 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A zatem  $(3\psi + \phi \circ \varphi)(x, y) = (36x + 47y, 33x + 42y)$ .

## Zadanie 2

Niech  $\varphi: V \rightarrow V$  będzie przekształceniem liniowym o wartościach i argumentach w przestrzeni liniowej  $V$ , w której rozpatrujemy bazy  $\mathcal{A}$  oraz  $\mathcal{B}$ . Niech  $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$  oraz  $A = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Znajdź:

a)  $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ ,

b)  $A^{-1}$ ,

c) macierz  $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  (wskazówka:  $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = A^{-1}$ ),

d) wyraz w trzecim rzędzie i pierwszej kolumnie macierzy  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$ .

## Rozwiązanie

a)  $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ ,

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -13 \\ 11 & -18 \end{bmatrix}.$$

b)  $A^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{w_2 - w_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \\ &\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\text{a zatem } A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

c) macierz  $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  (wskazówka:  $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = A^{-1}$ ),

Mamy

$$M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -13 \\ 11 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -71 & 50 \\ -98 & 69 \end{bmatrix}$$

d) wyraz w trzecim rzędzie i pierwszej kolumnie macierzy  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$ .

Ten wyraz to

$$\frac{(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{2} = -2.$$

### Zadanie 3

Używając twierdzenia Cramera określ dla jakich  $s, t \in \mathbb{R}$  układ równań

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_1 - tx_2 + x_3 - 2x_4 = -s - 2 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Nadal używając twierdzenia Cramera znajdź to rozwiązanie dla  $t = 3$  i  $s = 2$  oraz wykaż, że układ jest sprzeczny dla  $s = -2$ , o ile nie jest oznaczony.

### Rozwiązanie

Widzimy, że

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -t & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(2 - 3) - 2t + 3t = t - 1,$$

a więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy  $t \neq 1$ . Dla  $t = 3, s = 2$  mamy:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$x_4 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Tymczasem dla  $t = 1$  i  $s = -2$ , wiemy, że macierz współczynników przy zmiennych ma zerowy wyznacznik, ale, gdy druga kolumna to kolumna wyrazów wolnych, to dostajemy

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

co dowodzi, że układ jest wtedy sprzeczny.

## Zadanie 4

Niech będzie dana macierz

$$M = \begin{bmatrix} 2t & 1 & 1 & 2019 & 2018 & 2019 & 2018 & 2019 \\ 0 & 2t+1 & 1 & 2018 & 2019 & 2018 & 2019 & 2018 \\ -1 & 0 & 1 & 2019 & 2018 & 2019 & 2018 & 2019 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 17 & -8 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -8 & 2 & t-5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 & 8 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -15 & 0 & -5-t & -1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdź dla jakich  $t \in \mathbb{R}$  macierz  $M$  jest odwracalna, oraz oblicz  $\det(2 \cdot (M^{-2}))$  dla  $t = 2$ .

## Rozwiązanie

Widzimy, że macierz ta jest w postaci blokowej  $M = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & B \end{bmatrix}$ , gdzie macierze  $A$  i  $B$  są odpowiednio  $3 \times 3$  oraz  $5 \times 5$ .

$$\det A = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 1 \\ 0 & 2t+1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4t(t+1).$$

Tymczasem wyznacznik macierzy  $B$  liczymy sprowadzając ją do postaci trójkątnej:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 17 & -8 & 10 & 1 \\ -1 & -8 & 2 & t-5 & -1 \\ 2 & 10 & 8 & 5 & 2 \\ -3 & -15 & 0 & -5-t & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 + w_1, w_4 - 2w_1, w_5 + 3w_1} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & -10 & 10 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & t-5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & -5-t & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (1/5)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & t-5 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & -5-t & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + 2w_2, w_4 - 2w_2, w_5 + 3w_2} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_5 + w_4} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Skoro wyznacznik końcowej macierzy wynosi  $48(t-1)$ , to  $\det B = 48(t-1) \cdot 5 \cdot (-1) = -240(t-1)$ . Zatem macierz  $\det M = \det A \cdot \det B = -960(t-1)t(t+1)$  jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ .

Dla  $t = 2$  mamy  $\det M = -960 \cdot 2 \cdot 3$ , zatem  $\det(2 \cdot (M^{-2})) = \frac{2^8}{6^2 \cdot 960^2} = \frac{1}{129600}$ .