

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019

ćwiczenia 17. – rozwiązania

27 listopada 2018

1. Dla endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y)) = (3x + 4y, 5x - 2y)$ oraz baz: $\mathcal{A}_1 = \{(4, 1), (3, 1)\}, \mathcal{A}_2 = \{(2, 3), (5, 8)\}, \mathcal{A}_3 = \{(4, 2), (1, 1)\}$ znaleźć macierze $\mathcal{A}_i = M(\varphi)_{\mathcal{A}_i}^{\mathcal{A}_i}$ oraz macierze C_{ij} spełniające $A_j = C_{ij}^{-1} A_i C_{ij}$ dla $i, j = 1, 2, 3$.

Rozwiązanie: $M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$. Sprawdźmy jak wektory z bazy standardowej przedstawiają się w bazie $\mathcal{A}_1$: $(1, 0) = (1, -1)_{\mathcal{A}_1}, (0, 1) = (-3, 4)_{\mathcal{A}_1}$. Więc $M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ i oczywiście: $M(\text{id})_{\mathcal{A}_1}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. W takim razie:

$$\begin{aligned} A_1 &= M(\varphi)_{\mathcal{A}_1}^{\mathcal{A}_1} = M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}_1} M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} M(\text{id})_{\mathcal{A}_1}^{\text{st}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 17 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -38 & -26 \\ 56 & 39 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Obliczmy jak się przedstawiają wektory z bazy $\mathcal{A}_2$ i $\mathcal{A}_3$ w bazie $\mathcal{A}_1$: $(2, 3) = (-7, 10)_{\mathcal{A}_1}, (5, 8) = (-19, 27)_{\mathcal{A}_1}$ oraz $(4, 2) = (-2, 4)_{\mathcal{A}_1}, (1, 1) = (-2, 3)_{\mathcal{A}_1}$ oraz współrzędne wektorów z $\mathcal{A}_3$ w bazie $\mathcal{A}_2$: $(4, 2) = (22, -8)_{\mathcal{A}_2}, (1, 1) = (3, -1)_{\mathcal{A}_2}$, czyli:

$$C_{12} = M(\text{id})_{\mathcal{A}_2}^{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} -7 & -19 \\ 10 & 27 \end{bmatrix},$$

$$C_{13} = M(\text{id})_{\mathcal{A}_3}^{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C_{23} = M(\text{id})_{\mathcal{A}_3}^{\mathcal{A}_2} = \begin{bmatrix} 22 & 3 \\ -8 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_{21} = C_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & 19 \\ -10 & -7 \end{bmatrix},$$

$$C_{31} = C_{13}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C_{32} = C_{23}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 4 \\ \frac{-3}{2} & 11 \end{bmatrix}.$$

czyli:

$$A_2 = C_{21} A_1 C_{12} = \begin{bmatrix} 27 & 19 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -38 & -26 \\ 56 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -19 \\ 10 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 39 \\ -12 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -19 \\ 10 & 27 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 124 & 331 \\ -46 & -123 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = C_{31} A_1 C_{13} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -38 & -26 \\ 56 & 39 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -28 & -2 \\ 44 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & -9 \end{bmatrix}.$$

2. Dla poniższych endomorfizmów znaleźć wartości własne i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych:

- $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi((x, y)) = (2x - y, -x + 2y),$
- $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \varphi((x, y, z, t)) = (-6x - y + 2z, 3x + 2y + t, -14x - 2y + 5z, -t).$

Rozwiązanie:

•

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3,$$

więc $\Delta = 16 - 12 = 4$, czyli wartości własne to 1, 3.

Przestrzeń własna dla wartości własnej 1 jest opisana układem równań $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor $(1, 1)$.

Przestrzeń własna dla wartości własnej 3 jest opisana układem równań $\begin{cases} -x - y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$, czyli jej baza jest jednowektorowa i jest to wektor $(1, -1)$.

•

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \begin{vmatrix} -6-\lambda & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -6-\lambda & -1 & 2 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ -14 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2. \end{aligned}$$

Czyli wartości własne to 1 i -1.

Przestrzeń własna dla wartości 1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 7} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 21 & 7 & 0 & 7 \\ -14 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 2w_1, w_4 \cdot \frac{-1}{2}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - 7w_4} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}} \\ &\begin{bmatrix} -7 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} -7 & 0 & \frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot -17} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

czyli baza jest jednowektorowa, np: $(1, -3, 2, 0)$.

Przestrzeń własna dla wartości -1:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -14 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{w_2 \cdot 5, w_3 \cdot 5} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 15 & 15 & 0 & 5 \\ -70 & -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 + 3w_1, w_3 - 14w_1} \\ &\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 3w_2} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{4}, w_3 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} -5 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{-1}{5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli znów baza jest jednoelementowa, np: $(1, -1, 2, 0)$.

3. Dla poniższych endomorfizmów $\varphi: V \rightarrow V$ zbadać, czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy i wyliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

- $V = \mathbb{R}^2, \varphi((a, b)) = (a - b, a + 3b)$,
- $V = \mathbb{R}^4, \varphi((a, b, c, d)) = (2a + 4b, 5a + 3b, c + d, 3c - d)$.

Rozwiązanie:

•

$$w(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4,$$

czyli jest jedna wartości własna: 2. Przestrzeń własna dla wartości 2 rozpięta jest przez wektor $(1, -1)$, czyli przestrzeń rozpięta przez wektory własne jest tylko jednowymiarowa.

•

$$w(\lambda) = ((2 - \lambda)(3 - \lambda) - 20)((1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3) = (\lambda^2 - 5\lambda - 14)(\lambda^2 - 4)$$

A więc są trzy wartości własne: $-2, 2$ i 7 .

Dla wartości -2 :

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - \frac{5}{4}w_1, w_4 - w_3} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot 14, w_2 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli przykładowa baza to $(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -3)$.

Dla wartości 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \cdot \frac{1}{4}, w_4 - 3w_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{5}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2, w_3 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli bazę przestrzeni własnej stanowi wektor $(0, 0, 1, 1)$.

Dla wartości 7:

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

I widać od razu, że przestrzeń własną rozpina $(4, 5, 0, 0)$.

Razem wektory stanowią bazę przestrzeni V : $\mathcal{A} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -3), (0, 0, 1, 1), (4, 5, 0, 0)\}$

$$\text{oraz } M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Dla macierzy: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ zbadać czy jest ona diagonalizowalna. Jeśli tak, to znaleźć macierze C_i , że $C_i^{-1}A_iC_i$ jest diagonalna, $i = 1, 2$.

Rozwiązanie $w_1(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Jest jedna wartość własna równa 2, a przestrzeń własna dla niej jest rozpięta przez wektor $(1, 1)$, więc nie ma bazy złożonej z wektorów własnych, czyli macierz A_1 nie jest diagonalizowalna.

$w_2(\lambda) = (5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 9 = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Podobnie mamy tylko jedną wartość własną równą 2, a przestrzeń własna, podobnie, rozpięta jest przez wektor $(1, 1)$, czyli znów nie ma bazy własnej i macierz nie jest diagonalizowalna.