

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019
sprawdzian 1., grupa 9:45, wersja A – rozwiązania

30 października 2018

Uwaga: każdy napotkany układ równań należy rozwiązać metodą sprowadzania do postaci schodkowej zredukowanej.

Zadanie 1

Wyznacz wielomian $w(x)$ stopnia czwartego, taki że $w(-1) = 0, w(-2) = -45, w(2) = -21$ oraz posiadający wszystkie pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn wynosi 15, a suma -2 . Znajdź ten wielomian i jego pierwiastki.

Wskazówka: skorzystaj ze wzorów Viete'y, które mówią, że iloczyn pierwiastków wielomianu $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ wynosi $\frac{e}{a}$, zaś ich suma $-\frac{b}{a}$.

Rozwiązanie:

Zapisując w postaci układu równań dane, które mamy o wielomianie, otrzymujemy:

$$\begin{cases} a - b + c - d + e = 0 \\ 16a + 8b + 4c + 2d + e = -21 \\ 16a - 8b + 4c - 2d + e = -45 \\ 15a - e = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$$

Dla uproszczenia rachunków kolumny w macierzy zapisujemy w kolejności e, d, c, b, a i sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & -21 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -45 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1, w_4 + w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 9 & 15 & -21 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & 15 & -45 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 3 & -7 & 15 & -45 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_2, w_4 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 20 & -52 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 21 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 21 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - 2w_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 11 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 \leftrightarrow w_5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 11 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_5 - 4w_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_5 \cdot \frac{1}{19}}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_5, w_2 - 5w_5, w_3 - 5w_5, w_4 + 2w_5} \\
& \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_4, w_2 - 3w_4, w_3 + w_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 - w_3} \\
& \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Czyli szukany wielomian to $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Wiadomo, że -1 jest jego pierwiastkiem, po podzieleniu przez $(x+1)$ zostaje: $x^3 + x^2 - 17x + 5$. Zauważamy, że także 1 jest pierwiastkiem. Po podzieleniu przez $(x-1)$ otrzymujemy: $x^2 + 2x - 15$, czyli $\Delta = 64$, a pozostałe pierwiastki to: 3 i -5 .

Zadanie 2.

Zbadać dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} x + z = 5 \\ -x + (t^2 - 5)z = t - 3 \\ 2x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$$

jest oznaczony, dla jakich nieoznaczony, a dla jakich sprzeczny. W przypadku, gdy $t = 1$ podać jego rozwiązanie. Podać przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że wektor ten ma w niej współrzędne $0, \frac{1}{3}, 1$.

Rozwiązanie:

Wpisujemy w macierz i sprowadzamy do postaci schodkowej:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & t^2 - 5 & t - 3 \\ 2 & 3 & 3 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1, w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & t^2 - 4 & t + 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 - 4 & t + 2 \end{array} \right]$$

Widać, że są 3 przypadki. Jeśli $t = 2$ to układ jest sprzeczny, jeśli $t = -2$, to nieoznaczony, a jeśli $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, to jest oznaczony. Kontynuujemy rachunki dla $t = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{-1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 - w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot \frac{1}{3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Zatem szukane rozwiązanie to $(6, \frac{1}{3}, -1)$, a przykładowa baza to: $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (6, 0, -1)$ – łatwo sprawdzić, że jest to układ liniowo niezależny.

Zadanie 3.

Dane są w przestrzeni $\mathbb{R}^5$ podprzestrzeń W_a rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \\ x + y + z + t + aw = 0 \end{cases}$$

oraz

$$V_b = \text{lin}((-3, 2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, b, 0), (-4, 2, 1, b, 0), (0, 0, 0, 0, b)),$$

gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

- znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni W_a w zależności od $a \in \mathbb{R}$.
- znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni V_b w zależności od $b \in \mathbb{R}$.
- a dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$, $V_b = W_a$?
- czy istnieją takie $a, b \in \mathbb{R}$, że znalezioną bazę przestrzeni W_a można uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^5$ wektorami leżącymi w przestrzeni V_b ?

Rozwiązujemy zadany układ równań sprowadzając macierz do postaci schodkowej

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array} \right]$$

A zatem, jeśli $a \neq 0$ mamy 3 schodki i $\dim W_a = 2$ i baza to $\{(-3, 2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1, 0)\}$, zaś jeśli $a = 0$, to mamy 2 schodki oraz $\dim W_a = 3$ i baza to $\{(-3, 2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

Tymczasem jest jasne, że jeśli $b = 0$, to $\dim V_b = 2$ oraz baza to $\{(-3, 2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 0)\}$, zaś jeśli $b \neq 0$, to $\dim V_b = 3$ oraz baza to $\{(-3, 2, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, b, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

Zatem aby $V_b = W_a$ to przede wszystkim muszą się zgadzać wymiary. Mamy wtedy dwa przypadki:

- gdy wymiary te wynoszą 2, czyli $a \neq 0$, $b = 0$. Ale wtedy te przestrzenie są różne, bowiem wektor $(-1, 0, 0, 0, 0)$ nie spełnia pierwszego równania.
- gdy wymiary te wynoszą 3, czyli $a = 0$ oraz $b \neq 0$. Wtedy pierwszy wektor i trzeci spełnia oba równania. Drugi spełnia je, tylko gdy $b = 1$.

Wobec tego te przestrzenie się pokrywają wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ oraz $b = 1$.

Skoro wektor $(-3, 2, 1, 0, 0)$ zawsze leży w pierwszej z przestrzeni, to jedyna szansa na ich uzupełnienie (wystarczająca liczba wymiarów w obu nich), to gdy oba wymiary wynoszą 3. Jednak wtedy również ostatni wektor w znalezionej bazie V_b leży w pierwszej z przestrzeni, co czyni operację uzupełnienia niemożliwą.

Zadanie 4.

Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^5$ rozpiętej na wektorach $(1, 2, -1, 2, -1)$, $(2, 5, -2, 5, 3)$ oraz $(3, 7, -3, 7, 2)$. Następnie znaleźć układ równań jednorodnych opisujący tę podprzestrzeń.

Znajdujemy bazę:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & -3 & 7 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1, w_3 - 3w_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem baza to $(1, 2, -1, 2, -1)$, $(0, 1, 0, 1, 5)$, a wymiar badanej podprzestrzeni to 2. Kontynuujemy tym razem rozwiązywanie układu równań na współczynniki szukanego układu równań:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right].$$

A zatem baza przestrzeni współczynników to $(1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, -1, 0, 1, 0)$, $(11, -5, 0, 0, 1)$ a zatem odpowiadający jej szukany układ równań to:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ 11x_1 - 5x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$