

Algebra liniowa, WNE, 2018/2019
sprawdzian 1., grupa 8:00 – rozwiązania

30 października 2018

Uwaga: każdy napotkany układ równań należy rozwiązać metodą sprowadzania do postaci schodkowej zredukowanej.

Zadanie 1

Wyznacz wielomian $w(x)$ stopnia trzeciego, taki że $w(-3) = -32, w(1) = -16, w(3) = -32$ oraz posiadający wszystkie pierwiastki rzeczywiste, których iloczyn wynosi 5. Znajdź te pierwiastki.

Wskazówka: skorzystaj ze wzoru Viete'y, który mówi, że iloczyn pierwiastków wielomianu $ax^3 + bx^2 + cx + d$ wynosi $-\frac{d}{a}$.

Rozwiązanie

Dostajemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -16 \\ 27a + 9b + 3c + d = -32 \\ -27a + 9b - 3c + d = -32 \\ 5a + d = 0 \end{cases}$$

Zapisujemy macierz od końca (nie wiadomo w kolejności d, c, b, a , a na końcu kolumna wyrazów wolnych)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & -32 \\ 1 & -3 & 9 & -27 & -32 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1, w_3 - w_1, w_4 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & -16 \\ 0 & -4 & 8 & -28 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_4} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & -4 & 8 & -28 & -16 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 - 4w_2, w_4 + 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 12 & -44 & 80 \\ 0 & 0 & 6 & 34 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \leftrightarrow w_4} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 6 & 34 & 16 \\ 0 & 0 & 12 & -44 & 80 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 - 2w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 16 \\ 0 & 0 & 6 & 34 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -112 & -112 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_2 \cdot (-1), w_4 \cdot \frac{-1}{112}} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -16 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 6 & 34 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_4, w_2 + 4w_4, w_3 - 34w_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{1}{6}} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Czyli nasz wielomian to (pamiętamy, że w macierzy współczynniki zapisaliśmy wspak): $w(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$.

Znajdźmy jego pierwiastki: pierwszy zgadujemy – jest nim -1 . Dzielimy nasz wielomian przez dwumian $(x + 1)$ i dostajemy: $x^2 - 4x - 5$. I już możemy użyć standardowej metody, czyli $\Delta = 36$, czyli pierwiastki to: -1 i 5 , a więc ostatecznie pierwiastki $w(x)$ to -1 (podwójny) i 5 .

Zadanie 2.

Rozwiązując odpowiedni układ równań, zbadać dla jakich wartości $s, t \in \mathbb{R}$ wektor $w = (0, s - t - 2, 1)$ jest kombinacją liniową układu wektorów: $(1, -1, 2), (2, -t - 2, 5), (1, 0, 3)$. Wywnioskuj, dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ ten układ trzech wektorów jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$, a w przypadku gdy $t = 0, s = 3$ znajdź w tej bazie współrzędne wektora w . W tym przypadku przedstaw przykład bazy $\mathbb{R}^3$, w której wektor w ma współrzędne $1, 1, 1$.

Rozwiązanie

No to zapisujemy macierz i sprowadzamy do postaci schodkowej.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -t-2 & 0 & s-t-2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1, w_3 - 2w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 & s-t-2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -t & 1 & s-t-2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 + tw_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+t & s-2 \end{array} \right]$$

A zatem jasne jest, że jeśli $t \neq -1$ lub $s = 2$, to układ jest niesprzeczny, i w jest kombinacją liniową danego układu wektorów. Aby ten układ był bazą potrzeba i wystarcza, żeby układ był oznaczony, czyli $t \neq -1$. Kontynuujemy rozwiązanie układu dla $t = 0, s = 3$, aby policzyć współrzędne.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - w_3, w_2 - w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - 2w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

A zatem szukane współrzędne to $-1, 0, 1$. W przypadku $t = 0, s = 3$ mamy $w = (0, 1, 1)$, więc przykład bazy, w której ma on wszystkie współrzędne $1, 1, 1$ to $(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)$.

Zadanie 3.

Dane są w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ podprzestrzeń $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0\}$ oraz

$$V_t = \text{lin}((1, 1, 1, -4), (-1, t, -t - 2, t + 5), (1, 1, 3, -10), (0, 0, 0, |t| - 1)).$$

- znajdź bazę i wymiar podprzestrzeni W .
- uzupełnij znalezioną bazę do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.
- oblicz w znalezionej bazie $\mathbb{R}^4$ współrzędne wektora $(2, 0, 1, 5)$
- dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$, $V_t \subseteq W$ (każdy wektor przestrzeni V_t jest w przestrzeni W)?
- a dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$, $V_t = W$?

Oczywiście rozwiązaniem podanego równania na W jest $x_1 = 2x_2 + 3x_3 + x_4$, a zatem rozwiązanie ogólne to $(2x_2 + 3x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4)$. A zatem baza to $(2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$, a $\dim W = 3$.

Widać, że dodanie do tej bazy wektora $(1, 0, 0, 0)$ powoduje, że bardzo łatwo macierz z tymi wektorami w wierszach sprowadzić do postaci schodkowej, a zatem $(2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)$ to baza $\mathbb{R}^4$.

Obliczamy współrzędne wektora $(2, 0, 1, 5)$ rozwiązując układ równań:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \leftrightarrow w_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - 3w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{w_4 \cdot (-1)} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right]$$

A zatem współrzędne tego wektora to $0, 1, 5, -6$ i rzeczywiście $(2, 0, 1, 5) = 0 \cdot (2, 1, 0, 0) + 1 \cdot (3, 0, 1, 0) + 5(1, 0, 0, 1) - 6(1, 0, 0, 0)$.

Znajdźmy teraz bazę V_t :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 & \\ -1 & t & -t-2 & t+5 & \\ 1 & 1 & 3 & -10 & \\ 0 & 0 & 0 & |t|-1 & \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 + w_1, w_3 - w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -4 & \\ 0 & t+1 & -t-1 & t+1 & \\ 0 & 0 & 2 & -6 & \\ 0 & 0 & 0 & |t|-1 & \end{array} \right]$$

I już widać, że jeśli $t \neq 1, -1$ to $\dim V = 4$. Jeśli $t = 1$, to $\dim V = 3$, zaś jeśli $t = -1$, to w ogóle $\dim V = 2$.

A zatem $V_t \subseteq W$ może się zdarzyć tylko jeśli $t = 1$ lub $t = -1$. Sprawdźmy, czy te wektory spełniają równanie na W :

- $(1, 1, 1, -4)$ spełnia
- $(0, 0, 2, -6)$ spełnia
- $(0, t+1, -t-1, t+1)$ spełnia niezależnie od t ,
- $(0, 0, 0, |t|-1)$ spełnia dla $t = 1$ lub $t = -1$.

A zatem $V_t \subseteq W$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$ lub $t = -1$.

Aby $V_t = W$ dodatkowo muszą się zgadzać wymiary, a więc ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$.

Zadanie 4.

Znaleźć bazę i wymiar podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozpiętej na wektorach $(4, 5, 4), (1, 1, 2), (2, 3, 0)$ oraz $(-3, -4, -2)$. Następnie znaleźć układ równań jednorodnych opisujący tę podprzestrzeń.

Znajdujemy bazę:

$$\left[\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & -4 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - 4w_1, w_3 - 2w_1, w_4 + 3w_1} \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_3 - w_2, w_4 + w_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A zatem baza to $(1, 1, 2), (0, 1, -4)$, a wymiar badanej podprzestrzeni to 2. Kontynuujemy tym razem rozwiązywanie układu równań na współczynniki szukanego układu równań:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right]$$

A zatem rozwiązanie ogólne to $a = -6c, b = 4c$. A zatem baza przestrzeni współczynników to $(-6, 4, 1)$ a zatem odpowiadający jej szukany układ równań składa się z jednego równania i jest to:

$$-6x + 4y + z = 0$$