

A.

Udowodnij, że podziałów liczby n na cztery składniki jest tyle samo co podziałów liczby $3n$ na cztery składniki o rozmiarze co najwyżej $n - 1$.

B.

Udowodnij, że $(P_n)^2 < P_{5n}$ dla $n > 0$, gdzie P_n oznacza liczbę podziałów n .

C.

Jak wygląda enumerator podziałów, o których wiadomo, że zawierają co najmniej jeden składnik rozmiaru 2, co najwyżej trzy składniki rozmiaru 3 i dokładnie dwa składniki rozmiaru 5 ?

D.

Udowodnij, że liczba $\frac{(kn)!}{k!(n!)^k}$ jest całkowita dla dowolnych naturalnych $n > 0$ i k .

E.

Niech $a_n(k)$ oznacza liczbę n -permutacji z powtórzeniami ze zbioru $\{1, \dots, k\}$, w których k występuje nieparzystą liczbę razy. Znajdź zwarty wzór na $a_n(k)$ dla $k > 1$.

1.

Udowodnij, że dla $x, y, n \in \mathbb{N}$ zachodzi tożsamość $(x + y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}$

2.

Udowodnij tożsamość $\sum_{k=0}^m k^n = \sum_{k=0}^n k! \binom{m+1}{k+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

3.

Niech a_n oznacza liczbę n -ciągów zerojedynkowych nie zawierających spójnego podciagu 011.

Znajdź funkcję tworzącą i zwarty wzór na a_n .

4.

Niech a_n oznacza liczbę uporządkowanych podziałów n -zbioru, w których kolejność elementów w bloku jest bez znaczenia, natomiast istotna jest kolejność bloków (np. $a_2 = 3 : < \{1, 2\} >, < \{1\}.\{2\} >, < \{2\}, \{1\} >).$

a) Udowodnij, że ciąg (a_n) spełnia zależność rekurencyjną
 $a_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} a_i, a_0 = 1.$

b) Udowodnij, że $a_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^k}$, gdzie przyjmujemy, że $0^0 = 1.$

5.

Niech s_n będzie liczbą wszystkich skończonych ciągów $< x_1, \dots, x_k >$ liczb naturalnych, takich że dla każdego i zachodzi $1 \leq x_i \leq n$ oraz $x_{i+1} \geq 2x_i$ (długość ciągu k może być dowolna, w szczególności równa 0). Udowodnij, że ciąg s_n spełnia równanie rekurencyjne

$$s_n = s_{n-1} + s_{\lfloor n/2 \rfloor} \text{ dla } n \geq 1; s_0 = 1.$$

Wykaż, że funkcja tworząca $S(z)$ ciągu s_n spełnia zależność
 $(1-z)S(z) = (1+z)S(z^2).$

6.

Udowodnij, że dla $n > 0$ liczba permutacji $< a_1, \dots, a_n >$ zbioru $\{1, \dots, n\}$ takich, że $a_{i+1} - a_i \neq 1$ dla $i = 1, \dots, n-1$, jest równa $= D_n + D_{n-1}$, gdzie D_n to liczba n -nieporządków.

Wskazówka: Zasada włączania-wyłączania.

7.

Uporządkowanym podziałem dodatniej liczby całkowitej n , czyli n -kompozycją nazywamy przedstawienie w postaci sumy dodatnich składników, przy czym kolejność składników w tym przedstawieniu jest istotna (np. 3-kompozycje to: $1+1+1, 1+2, 2+1, 3$). Udowodnij, że uporządkowanych podziałów liczby n na składniki ≤ 2 jest tyle samo, co uporządkowanych podziałów liczby $n+2$ na składniki ≥ 2 .

8.

Niech $W_k(n)$ oznacza liczbę podziałów n na składniki większe lub równe k , zaś $M_k(n)$ - liczbę podziałów n na składniki mniejsze bądź równe k , w szczególności $W_k(0) = M_k(0) = 1$ dla $k > 0$. Udowodnij, że dla $n > 0$

$$\sum_{k \geq 1} (M_k(n-k) - W_k(n-k)) = 0.$$