

A.

Określ rodzaj podziałów, których licznosci mają szereg $\Pi_k(1 + x^k + x^{2k})$ jako funkcje tworzącą.

B.

Pokaż, że jest tyle samo podziałów n na k części co podziałów n na części, z których największa ma licznosc k .

C.

Pokaż, że podziałów n na nie więcej niż k części parzystych jest tyle samo, co podziałów $n + k$ na dokładnie k części nieparzystych.

D.

Czy jest prawdą, że jest tyle samo podziałów n na nie więcej niż k części co podziałów n na części nie większe niż k ?

E.

Udowodnij, że podziałów liczby n^2 na n różnych składników jest tyle samo co podziałów liczby $\binom{n}{2}$ na co najwyżej n składników.

F.

Niech A_n oznacza liczbę podziałów n na składniki nieparzyste, zaś B_n - liczbę podziałów na składniki parzyste. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{2n} - B_{2n}) = \infty$.

G.

Dla ustalonego podziału π liczby n , niech $A(\pi)$ oznacza liczbę jedynek w π , zaś $B(\pi)$ - liczbę różnych składników π .

Np. dla podziału $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4$ mamy $A(\pi) = 2$ oraz $B(\pi) = 3$.

Udowodnij, że $\sum_{\pi} A(\pi) = \sum_{\pi} B(\pi)$, gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich podziałach ustalonej liczby n .

Wskazówka: Spróbuj wyrazić każdą ze stron tożsamości przez $P(1), P(2), \dots, P(n-1)$, gdzie $P(k)$ oznacza łączną liczbę podziałów liczby k .