

A

Niech $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (symetryczna różnica zbiorów).

a) Udowodnij, że $\oplus$ jest operacją łączną oraz że $x \in P_1 \oplus \dots \oplus P_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy x należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród $P_1, \dots, P_k$.

b) Udowodnij, że dla danej rodziny zbiorów skończonych $P_1, \dots, P_k$
 $|P_1 \oplus \dots \oplus P_k| = \sum_{j \geq 0} (-2)^j S_j$,
gdzie $S_r = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} |P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_r}|$.

B

Niezbyt ciekawe, ale pouczające:

Oblicz $\sum_{n \in A} 2^{-n}$, gdzie $A = \{n \in \mathbb{N} : |\{i \in \{2, 3, 5, 7\} : i|n\}| = 2\}$.

C

Udowodnij, że liczba rozstawień k nie atakujących się wież na planszy $\{(i, j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ jest równa $\binom{n+1}{n+1-k}$.

D

Oblicz liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ w liczbach naturalnych takich, że $0 \leq x_i \leq i + 4$.