

A.

Dla wielomianu $W(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, gdzie $a_0 = 1$, wielomian lustrzany definiujemy jako $W^L(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$.

Udowodnij, że $W(x) = \prod_i (1 - \lambda_i x)^{k_i} \Leftrightarrow W^L(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{k_i}$.

B.

Rozwiąż równania:

a) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, gdzie $a_0 = 1, a_1 = 3$.

b) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + [n \geq 0]$,

c) $a_n = -a_{n-1} + 8a_{n-2} + 12a_{n-3}$, gdzie $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 17$,

d) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 4 \cdot 2^n + 2$, gdzie $a_0 = 1, a_1 = 5$,

e) $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}, b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$, gdzie $a_0 = 1, b_0 = 2$.

C.

Niech b_n będzie liczbą sposobów zapisania n jako sumy potęg 2, przy czym każda potęga może wystąpić co najwyżej 2 razy (np. $6 = 2^2 + 2^1 = 2^2 + 2^0 + 2^0$, czyli $b_6 = 3$) oraz $b_0 = 1$.

Pokaż, że zachodzi zależność

$$B(x) = B(x^2)(1 + x + x^2), \text{ gdzie } B(x) \text{ jest funkcją tworzącą ciąg } b_n.$$

D.

Niech a_n oznacza liczbę funkcji niemalejących $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ takich, że $f(i) \leq i$ dla każdego i . Znajdź zwarty wzór na a_n bez użycia funkcji tworzących.