

Zadania dodatkowe.

1. Udowodnij nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ dla } a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

przy pomocy następującego wariantu indukcji:

Jeśli

- $P(1)$,
- $P(n) \Rightarrow P(2n)$,
- $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ dla $n > 1$,

to $P(n)$ dla każdego $n \geq 1$.

2. Udowodnij, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci

$$\pm 1^2 + \pm 2^2 + \dots + \pm k^2$$

przy pomocy następującego wariantu indukcji:

Jeśli

- $P(1), \dots, P(4)$,
- $P(n) \Rightarrow P(n+4)$,

to $P(n)$ dla każdego $n \geq 1$.

3. Udowodnij, że liczba

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$$

jest parzysta.

Wskazówka: Indukcja. Które liczby mają parzystą, a które nieparzystą liczbę dzielników ?

4. Udowodnij, że za pomocą znaczków o nominałach 4 i 5 centów można ofrankować przesyłkę na każdą kwotę powyżej 11 centów.

5. Rozważmy następującą grę: gracze A i B w kolejnych rundach na przemian odłamują z tabliczki czekolady o początkowym rozmiarze $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{Z}^+$) prostokątny pasek (wzdłuż całego brzegu) i zjadają go. Przegrywa ten, kto zostanie zmuszony do zjedzenia lewego górnego rogu. Kto wygrywa w tej grze ?

6. Na brzegu koła zaznaczono n punktów i narysowano wszystkie łączące je cięciwy, przy czym żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie. Na ile części zostało podzielone koło ?

7. Rozwiąż następujące równanie rekurencyjne.

$$nf_n = (n+2)f_{n-1} + (n+2), \text{ gdzie } f_0 = 0$$

8. Udowodnij, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić jako sumę liczb postaci $2^a 3^b$, przy czym żaden składnik nie jest dzielnikiem innego.