

1. Znajdź funkcje tworzące ciągów

a) $\langle H_n \rangle$

b) $\langle n^2 \rangle$

2. Niech $G_k(x) = \sum_n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{x^n}{n!}$

będzie wykładniczą funkcją tworzącą liczb Stirlinga drugiego rodzaju, przy ustalonym wskaźniku.

Pokaż, że $G_k(x) = \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$, dowodząc kolejno tożsamości:

a) $\sum_m \binom{n}{m} \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\},$

b) $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} (k+1) + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\},$

c) $G_k e^x = (k+1)G_{k+1} + G_k.$

Znajdź zwarty wzór na wykładniczą funkcję tworzącą liczb Bella $B_n = \sum_k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$

3. Niech a_n oznacza liczbę funkcji niemalejących $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ takich, że $f(i) \leq i$ dla każdego i . Znajdź zwarty wzór na a_n bez użycia funkcji tworzących.

4. Oblicz $a_n = \sum_{0 \leq i \leq n} F_i \cdot F_{n-i}.$

5. Permutacja f jest inwolucją, gdy złożenie f ze sobą jest identycznością.

Pokaż, że wykładniczą funkcją tworzącą dla liczby inwolucji jest $e^{x + \frac{x^2}{2}}.$

6. Dla wielomianu $W(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, gdzie $a_0 = 1$, wielomian lustrzany definiujemy jako $W^L(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}.$

Udowodnij, że $W(x) = \prod_i (1 - \lambda_i x)^{k_i} \Leftrightarrow W^L(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{k_i}.$

7. Rozwiąż równania:

a) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 1$, gdzie $a_0 = 1, a_1 = 3.$

b) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + [n \geq 0],$

c) $a_n = -a_{n-1} + 8a_{n-2} + 12a_{n-3}$, gdzie $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 17,$

d) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n - 4 \cdot 2^n + 2$, gdzie $a_0 = 1, a_1 = 5$,

e) $a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$, gdzie $a_0 = 1, b_0 = 2$.

8. Niech b_n będzie liczbą sposobów zapisania n jako sumy potęg 2, przy czym każda potęga może wystąpić co najwyżej 2 razy (np. $6 = 2^2 + 2^1 = 2^2 + 2^0 + 2^0$, czyli $b_6 = 3$) oraz $b_0 = 1$.

Pokaż, że zachodzi zależność

$B(x) = B(x^2)(1 + x + x^2)$, gdzie $B(x)$ jest funkcją tworzącą ciąg b_n .