

1. Znajdź wzór na liczbę n -permutacji o danej sygnaturze.
2. Permutacja f jest inwolucją, gdy $f \circ f = id$. Pokaż, że
 - a) Permutacja jest inwolucją wtedy i tylko wtedy, gdy ma sygnaturę $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2}$;
 - b) każda permutacja jest złożeniem dwóch inwolucji.
3. Dane są liczby naturalne $n \geq k \geq 0$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowej n -permutacji jedynka należy do cyklu o długości k ?
4. Pokaż, że losowa n -permutacja z prawdopodobieństwem H_{n-1}/n składa się dokładnie z dwóch cykli.
5. Mamy n skarbonek i n kluczy, przy czym każdy klucz pasuje do dokładnie jednej skarbonki. Wrzucamy losowo po jednym kluczu do każdej skarbonki, po czym rozbijamy k skarbonek, $1 \leq k \leq n$. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dzięki temu będzie można otworzyć wszystkie pozostałe skarbonki.
6. Pokaż tożsamość $x^n = \sum_k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^{\underline{k}}$ przez interpretację kombinatoryczną.
7. Pokaż następujące wzory:
 - a) $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-k}} i_1 \cdot i_2 \dots i_{n-k} \cdot [1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq k]$
 - b) $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = \sum_{i_1, \dots, i_{n-k}} i_1 \cdot i_2 \dots i_{n-k} \cdot [0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} < n]$
8. Uprość sumę:
 Pokaż tożsamość $\sum_i \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right] (-1)^{n-i} = [n = k]$ przez interpretację kombinatoryczną.
9. Udowodnij tożsamość $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i+j \end{smallmatrix} \right\} \binom{i+j}{i} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ i \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} n-k \\ j \end{smallmatrix} \right\}$. Czy prawdziwa jest analogiczna tożsamość dla liczb Stirlinga I rodzaju?