

1. Dla jakich wartości $i \in \{0, \dots, n\}$ współczynnik dwumianowy $\binom{n}{i}$ przyjmuje wartość maksymalną, przy ustalonym n ?

2. Wyprowadź wzór sumowania równoległego

$$\sum_{i=0}^k \binom{y+i}{i} = \binom{y+k+1}{k}$$

przez interpretację kombinatoryczną.

3. Wyprowadź wzór na sumowanie po górnym wskaźniku $\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ na trzy sposoby

- indukcja z tożsamości Pascala,
- interpretacja kombinatoryczna,
- sumując przez różnice skończone.

4. Uprość następujące sumy:

a) $\sum_i i \binom{n}{i},$

b) $\sum_{i=0}^n i^2 \binom{n}{i},$

c) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{j},$

d) $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k},$

e) $\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{m-k},$

f) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2^k}{k+1}.$

5. Rozstrzygnij, ile końcowych zer w zapisie dziesiętnym ma liczba $11^{50} - 1$.

6. Oblicz sumę $\sum_{A, B \subset \{1, \dots, n\}} |A \cup B|.$

7. Znajdź liczbę ciągów długości n złożonych z zer i jedynek, takich że liczba jedynek na pozycjach o numerach podzielnych przez 3 jest równa liczbie zer na pozycjach o numerach niepodzielnych przez 3.

8. Uprość sumę:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} \sum_{1 \leq k, l \leq n; k+l \leq n} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} (j-i-1)^{n-k-l} \text{ dla } m, n > 0.$$

9. Udowodnij Twierdzenie o Dwumianie dla wykładników całkowitych ujemnych:

$$(1+x)^{-r} = \sum_{i \geq 0} \binom{-r}{i} x^i \text{ dla } r \in \mathbb{N} \text{ i } |x| < 1.$$

