

1. Oblicz sumy:

a) $S_n = \sum_{0 \leq i < n} (-1)^i i^3$

b) $S_n = \sum_{0 < i < n} i(i-1)3^i$

c) $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$

d) $S_n = \sum_{k=0}^n (k^2 + 1)k!$.

2. Oblicz następujące sumy podwójne:

a) $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 2^i$,

b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i)$,

c) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$,

d) $\sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{1}{i-j}$.

3. Oblicz $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)}{4^k}$.

4. Oblicz sumę $\sum_{0 \leq i \leq n} \lceil \sqrt{i} \rceil$.

5. Pokaż następującą równość, sumując przez części:

$$\sum_{0 \leq i < n} iH_i = \int_0^n iH_i = \frac{n^2}{2}(H_n - \frac{1}{2}).$$

6. Oblicz sumę pól wszystkich prostokątów o bokach równoległych do osi wkładu współrzędnych i wierzchołkach w punktach ze zbioru $\{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$.

7. Ciąg 123456789101112.... jest utworzony przez konkatencję zapisów dziesiętnych liczb naturalnych.

Jeśli pozycja 10^n w tym ciągu (zaczynającym się od pozycji 1) jest cyfrą z zapisu liczby k -cyfrowej, to przyjmujemy $f(n) = k$. Na przykład $f(2) = 2$, ponieważ setna cyfra w tym ciągu stanowi fragment dwucyfrowej liczby 55.

Oblicz $f(100005)$.

8. Oblicz, na ile sposobów można przedstawić $10!$ jako sumę KOLEJNYCH liczb całkowitych.

