

1. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Wyraż przez podłogi i sufity moc zbioru
 - a) $\mathbb{Z} \cap [a, b]$,
 - b) $\mathbb{Z} \cap [a, b)$,
 - c) $\mathbb{Z} \cap (a, b]$,
 - d) $\mathbb{Z} \cap (a, b)$.

2. Czy dla każdego rzeczywistego $x \geq 1$ zachodzi równość $\lceil \lg \lceil x \rceil \rceil = \lceil \lg x \rceil$?
 Co jeśli wszystkie lub niektóre sufity zamienimy na podłogi ?
 Co jeśli zamiast $\lg x$ weźmiemy $\ln x$ lub $\sqrt{x}$?

3. Spróbuj udowodnić przez indukcję nierówność $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$.
 Jeśli nie wychodzi, to spróbuj wzmocnić tezę.

4. Udowodnij przez indukcję dolne oszacowanie dla liczb harmoniczych $H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1$.

5. Udowodnij przez indukcję nierówność Bernoulli'ego: $1 + nh \leq (1 + h)^n$, która zachodzi dla rzeczywistego $h \geq -1$ i naturalnego n .

6. Udowodnij, że za pomocą znaczków o nominałach 4 i 5 centów można ofrankować przesyłkę na każdą kwotę powyżej 11 centów.

7. Rozważmy następującą grę: gracze A i B w kolejnych rundach na przemian odłamują z tabliczki czekolady o początkowym rozmiarze $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{Z}^+$) prostokątny pasek (wzdłuż całego brzegu) i zjadają go. Przegrywa ten, kto zostanie zmuszony do zjedzenia lewego górnego rogu. Kto wygrywa w tej grze ?

8. W grze NIM dwóch graczy na przemian usuwa kamienie podzielone na pewną liczbę grup. W jednym ruchu można usunąć dowolną dodatnią liczbę kamieni z jednej z grupy. Wygrywa ten gracz, który usunie ostatni kamień.
 Udowodnij, że stan w grze opisany liczbami kamieni w poszczególnych grupach $a_1, \dots, a_k$ jest przegrywający dla gracza, który ma wykonać ruch, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a_1, \dots, a_k) = a_1 \oplus \dots \oplus a_k = 0$, gdzie $\oplus$ oznacza operację xor.

9. Do problemu wież Hanoi dokładamy dodatkowe ograniczenie: nie wolno przekładać krążka bezpośrednio między słupkami A i C . Ile teraz potrzeba ruchów ?

10. Na brzegu koła zaznaczono n punktów i narysowano wszystkie łączące je cięciwy, przy czym żadne trzy cięciwy nie przecinają się w jednym punkcie. Na ile części zostało podzielone koło ?

11. Udowodnij, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić jako sumę liczb

postaci $2^a 3^b$, przy czym żaden składnik nie jest dzielnikiem innego.

12. Udowodnij, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można przedstawić w postaci $\pm 1^2 + \pm 2^2 + \dots + \pm k^2$

przy pomocy następującego wariantu indukcji:

Jeśli

- $P(1), \dots, P(4)$,
- $P(n) \Rightarrow P(n+4)$,

to $P(n)$ dla każdego $n \geq 1$.

13. Rozwiąż następujące równanie rekurencyjne.

$nf_n = (n+2)f_{n-1} + (n+2)$, gdzie $f_0 = 0$

Zadania dodatkowe.

14. Udowodnij nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}, \text{ dla } a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

przy pomocy następującego wariantu indukcji:

Jeśli

- $P(1)$,
- $P(n) \Rightarrow P(2n)$,
- $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ dla $n > 1$,

to $P(n)$ dla każdego $n \geq 1$.

15. Udowodnij, że liczba

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$$

jest parzysta.

Wskazówka: Indukcja. Które liczby mają parzystą, a które nieparzystą liczbę dzielników?

16. W oryginalnym problemie wież Hanoi pojawia się 2^n konfiguracji krążków na słupkach, podczas gdy wszystkich jest więcej. Ile? Jak rozpoznać, czy dana konfiguracja wystąpi podczas przekładania krążków w oryginalnym problemie?