

Zadania przygotowujące do egzaminu z MD

1. Znajdź liczbę ciągów $\langle A_1, \dots, A_k \rangle$ takich, że $A_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ dla $1 \leq i \leq k$ oraz

$$|A_1 \cap \dots \cap A_k| = r.$$

2. Niech a_n oznacza liczbę *uporządkowanych* podziałów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ (tzn. takich, w których istotna jest kolejność bloków, ale nie kolejność elementów w bloku). Udowodnij, że

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k = n! 2^{n-1} \text{ dla } n \geq 1.$$

3. Udowodnij tożsamość

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} k \\ m \end{matrix} \right\} = \binom{n}{m} \frac{(n-1)!}{(m-1)!}, \quad \text{dla } n, m > 0.$$

4. Permutacja τ ma sygnaturę $2^4 3^5$. Znajdź liczbę permutacji σ takich, że $\sigma^4 = \tau$.

5. Niech c_n oznacza liczbę sposobów rozdzielania n identycznych cukierków między czworo dzieci tak, żeby najstarsze dziecko dostało dokładnie tyle cukierków, ile pozostałe dzieci razem wzięte. Znajdź funkcję tworzącą i zwarty wzór na c_n .

6. Niech $f(x) = \frac{x^3 e^{2x^2}}{(1-x^2)^2}$. Oblicz $f^{(9)}(0)$ (dziewiąta pochodna f w punkcie 0).

7. Udowodnij, że podziałów liczby n , w których nie występują składniki podzielne przez 4, jest tyle samo, co podziałów liczby n , w których każdy składnik występuje co najwyżej 3 razy.

8. Dla ustalonego podziału π liczby n , niech $A(\pi)$ oznacza liczbę jedynek w π , zaś $B(\pi)$ — liczbę różnych składników w π .

PRZYKŁAD: dla podziału π : $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4$ mamy $A(\pi) = 2$ oraz $B(\pi) = 3$.

Udowodnij, że $\sum_{\pi} A(\pi) = \sum_{\pi} B(\pi)$, gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich podziałach ustalonej liczby n .

WSKAZÓWKA: Spróbuj wyrazić każdą ze stron tożsamości przez $P(1), P(2), \dots, P(n-1)$, gdzie $P(k)$ to łączna liczba podziałów liczby k .

9. Znajdź dwie ostatnie cyfry zapisu dziesiętnego liczby 13^{11753^2} .

10. Oblicz $(102^{70} + 1)^{35} \bmod 111$.

11. Kolorujemy pola prostokąta o 3 wierszach i 4 kolumnach z użyciem dwóch kolorów. Dwa kolorowania utożsamiamy, jeśli jedno powstaje z drugiego przez zastosowanie *dowolnej* permutacji wierszy i *cyklicznego przesunięcia* kolumn. Znajdź liczbę istotnie różnych kolorowań, w których każdy z kolorów jest użyty po 6 razy.

12. *Zespolecie* $G + H$ grafów G i H o rozłącznych zbiorach wierzchołków to graf o zbiorze wierzchołków $V(G) \cup V(H)$ i zbiorze krawędzi $E(G) \cup E(H) \cup \{\{u, v\} : u \in V(G), v \in V(H)\}$. Znajdź liczbę sposobów pomalowania wierzchołków grafu $C_4 + C_5$ (gdzie C_k to cykl k -wierzchołkowy) tak, aby trzy wierzchołki były zielone, trzy czerwone i trzy niebieskie. Dwa sposoby pomalowania utożsamiamy, jeśli jeden przechodzi na drugi przy pewnym automorfizmie grafu.