

Zadanie przygotowujące do II kolokwium z MD

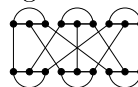
1. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego ścieżką długości 1 lub 2.
2. Turniej T nazywamy *silnie regularnym* jeśli moce zbiorów $D_v = \{w : v \rightarrow w \in E(T)\}$ oraz $C_{v,u} = \{w : v \rightarrow w, u \rightarrow w \in E(T)\}$ nie zależą od wyboru wierzchołków $v, u \in V(T)$. Udowodnij, że jeśli silnie regularny turniej n -wierzchołkowy istnieje, gdzie $n > 1$, to $4 \mid n-3$.
WSKAZÓWKA: Jak zależą wartości $|D_v|$ i $|C_{v,u}|$ od n ?

3. Dla $n \geq 4$ znajdź liczbę etykietowanych drzew n -wierzchołkowych, w których $\{1, 2, 3\}$ jest zbiorem niezależnym.

WSKAZÓWKA: Udowodnij, że liczba drzew n -wierzchołkowych, które zawierają drzewo  jako podgraf, jest równa $3n^{n-4}$.

4. Udowodnij, że jeśli G jest grafem 100-wierzchołkowym, w którym 90 wierzchołków ma stopień nie większy niż 9, to $\chi(G) \leq 10$.

5. Niech G_n będzie grafem powstającym przez zastąpienie każdego wierzchołka w grafie $K_{n,n}$ kliką K_n , na przykład G_3 to



Formalnie,

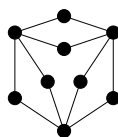
$$\begin{aligned} V(G_n) &= \{x_{i,j} : 0 \leq i, j < n\} \cup \{y_{i,j} : 0 \leq i, j < n\}, \\ E(G_n) &= \bigcup_{\substack{0 \leq i < n \\ 0 \leq j \neq j' < n}} \{\{x_{i,j}, x_{i,j'}\}\} \cup \bigcup_{\substack{0 \leq i < n \\ 0 \leq j \neq j' < n}} \{\{y_{i,j}, y_{i,j'}\}\} \cup \bigcup_{0 \leq i, j < n} \{\{x_{i,j}, y_{j,i}\}\} \end{aligned}$$

Znajdź liczbę chromatyczną i indeks chromatyczny grafu G_{2016} .

WSKAZÓWKA: Pomocne przy obliczaniu indeksu chromatycznego może się okazać udowodnienie, że indeks chromatyczny klik K_n to $n - [2 \mid n]$ dla $n > 1$.

(**Dodatkowy podpunkt z *.**) Znajdź indeks chromatyczny grafu G_{2017} .

6. Znajdź wielomian chromatyczny poniższego grafu:



7. G jest planarnym grafem 9-wierzchołkowym o 3 spójnych składowych. Udowodnij, że graf $\overline{G}$ (dopełnienie grafu G) jest nieplanarny.

WERSJA ŁATWIEJSZA: Udowodnij, że dopełnienie planarnego grafu 10-wierzchołkowego o 3 spójnych składowych jest nieplanarne.

8. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że ułamek nieskracalny reprezentujący liczbę H_{p-1} ma licznik podzielny przez p .

9. Udowodnij następującą cechę podzielności: liczba n jest podzielna przez 73 wtedy i tylko wtedy, gdy różnica liczby złożonej z czterech ostatnich cyfr zapisu dziesiętnego n i liczby złożonej z pozostałych cyfr jest podzielna przez 73 (np. liczba 12345687 jest podzielna przez 73, ponieważ różnica $5687 - 1234 = 4453 = 73 \cdot 61$ jest podzielna przez 73).

10. Oblicz $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}}_{2016} \bmod 2016$.

11. Udowodnij, że jeśli $n > 0$ jest parzyste, to $n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1$.
12. Znajdź liczbę rozwiązań kongruencji $x^{118} \equiv 113 \pmod{1001}$ w zbiorze $\{0, \dots, 1000\}$ i podaj jedno z nich.