

To dolne ograniczenie jest dosyć słabe, w porównaniu z faktyczną równością asymptotyczną $\pi(n) \sim n/\ln n$, ponieważ dla dużych n wartość $\log n$ jest znacznie mniejsza niż $n/\log n$. Ale w końcu zbytnio się nie napracowaliśmy, a ograniczenie jest ograniczeniem.

4.5. Liczby względnie pierwsze

O dwóch liczbach m, n mówimy, że są *względnie pierwsze*, gdy m i n nie mają wspólnych dzielników pierwszych, czyli gdy $\text{NWD}(m, n) = 1$.

Pojęcie to jest na tyle użyteczne w praktyce, że powinniśmy mieć na nie specjalne oznaczenie. Niestety! Teorioliczbowcy nie uzgodnili tak dobrego oznaczenia, jak to, które mamy zamiar zaproponować. Zatem wołamy: USŁYSZCIE NAS, O MATEMATYCY CAŁEGO ŚWIATA! NIE CZEKAJMY ANI CHWILI DŁUŻEJ! MOŻEMY UPROŚCIĆ WIELE WZORÓW PRZEZ PRZYJĘCIE TERAZ NOWEJ NOTACJI! ZGÓDŹMY SIĘ NA NOTACJĘ ' $m \perp n$ ', CZYTANĄ JAKO "m PIERWSZE WZGLĘDEM n," JEŚLI m I n SĄ WZGLĘDNIE PIERWSZE. Innymi słowy, ustalmy, że

$$m \perp n \iff m, n \text{ są całkowite i } \text{NWD}(m, n) = 1. \quad (4.26)$$

Ułamek m/n jest nieskracalny wtedy i tylko wtedy, gdy $m \perp n$. Ponieważ upraszczamy ułamki wyciągając największy wspólny dzielnik z licznika i mianownika, więc wolno nam podejrzewać, że w ogólności

$$m/\text{NWD}(m, n) \perp n/\text{NWD}(m, n); \quad (4.27)$$

i rzeczywiście tak jest. Wynika to z ogólniejszego prawa $\text{NWD}(km, kn) = k\text{NWD}(m, n)$, udowodnionego w ćwiczeniu 14.

Relacja $\perp$ wyraża się łatwo, jeżeli korzystamy z reprezentacji wykładniczej liczb, z uwagi na regułę NWD (4.14):

$$m \perp n \iff \min(m_p, n_p) = 0 \text{ dla każdego } p. \quad (4.28)$$

Co więcej, ponieważ m_p i n_p są nieujemne, możemy zapisać to następująco:

$$m \perp n \iff m_p n_p = 0 \text{ dla każdego } p. \quad (4.29)$$

Jesteśmy gotowi udowodnić teraz ważny fakt, który pozwala rozdzielać i łączyć dwie różne relacje $\perp$ o tej samej lewej stronie:

$$k \perp m \text{ i } k \perp n \iff k \perp mn. \quad (4.30)$$

Podobnie, jak proste prostopadłe nie mają wspólnego kierunku, tak prostopadłe liczby nie mają wspólnego dzielnika pierwszego.

Iloczyn skalarny wynosi zero, tak jak w przypadku wektorów prostopadłych.

W świetle równania (4.29) prawo to jest innym sposobem powiedzenia, że $k_p m_p = 0$ i $k_p n_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k_p(m_p + n_p) = 0$, dla nieujemnych m_p i n_p .

Istnieje piękna metoda konstrukcji wszystkich nieujemnych ułamków postaci m/n spełniających $m \perp n$, nazywana *drzewem Sterna-Brocota* za względu na jej odkrycie dokonane niezależnie przez matematyka niemieckiego, Moritza Sterna [340] oraz przez francuskiego zegarmistrza Achille Brocota [41]. Pomysł polega na rozpoczęciu od dwóch ułamków $(\frac{0}{1}, \frac{1}{0})$ i następnie na wykonywaniu następującej czynności tak długo, jak długo tego potrzeujemy:

Wprowadź $\frac{m+m'}{n+n'}$ między dwa sąsiadujące ze sobą ułamki $\frac{m}{n}$ i $\frac{m'}{n'}$.

Nowo powstały ułamek $(m+m')/(n+n')$ nazywa się *medianem* ułamków m/n i m'/n' . Na przykład pierwszy krok daje nam jeden nowy ułamek pomiędzy $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{0}$,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}.$$

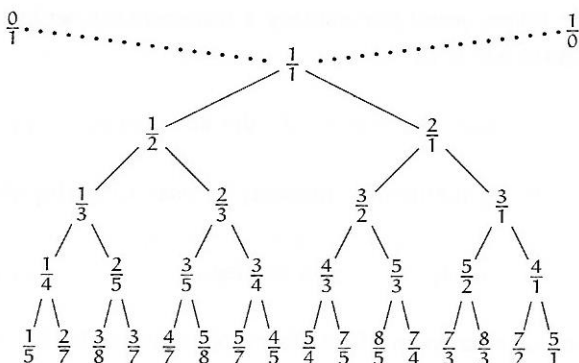
W kolejnym kroku dostajemy 2 następne:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}.$$

a krok później 4 kolejne:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{0};$$

a dalej uzyskamy 8,16 itd. nowych ułamków. Całą tę strukturę można sobie wyobrazić jako nieskończone drzewo binarne, którego górne poziomy wyglądają następująco:



Każdy ułamek jest postaci $\frac{m+m'}{n+n'}$, gdzie $\frac{m}{n}$ jest najbliższym przodkiem na lewo, a $\frac{m'}{n'}$ jest najbliższym przodkiem na prawo. (Przodek jest to tu ułamek,

Ciekawe,
że matematycy tak
lubią mówić
„odkrycie”, podczas
gdy wszyscy inni
powiedzieliby
„wynalazek.”

Wydaje mi się, że
1/0 to w postaci
nieskracalnej
po prostu
nieskończoność.

który może zostać osiągnięty za pomocą przechodzenia po gałęziach do góry.)
 Drzewo to ma wiele ciekawych właściwości.

Dlaczego ta konstrukcja w ogóle działa? Czemu na przykład każdy mediant $(m + m')/(n + n')$ okazuje się w postaci nieskracalnej w tym drzewie? (Gdyby np. n, m, n', m' były nieparzyste, wówczas otrzymalibyśmy mediant typu parzyste/parzyste; jednak jakoś tak się dzieje, że ułamki z nieparzystymi licznikami i mianownikami nigdy w tym drzewie obok siebie nie występują.) Dlaczego wszystkie możliwe ułamki występują w drzewie dokładnie raz? Dlaczego jakiś ułamek nie mógłby wystąpić 2 razy, albo w ogóle nie wystąpić?

Na wszystkie te pytania są zaskakująco proste odpowiedzi, wynikające z następującego podstawowego faktu: *Jeśli m/n i m'/n' są sąsiadującymi ułamekami na dowolnym etapie konstrukcji, to zachodzi*

$$m'n - mn' = 1. \quad (4.31)$$

Równanie to jest spełnione na samym początku konstrukcji ($1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$), a kiedy wstawimy nowy mediant $(m + m')/(n + n')$, to przypadki, które trzeba sprawdzić, są następujące:

$$\begin{aligned} (m + m')n - m(n + n') &= 1; \\ m'(n + n') - (m + m')n' &= 1. \end{aligned}$$

Oba te równania są równoważne wyjściowemu równaniu (4.31), które mają zastąpić. W związku z tym równanie (4.31) jest spełnione na wszystkich etapach konstrukcji.

Co więcej, jeśli $m/n < m'/n'$ i jeśli wszystkie wartości są nieujemne, to łatwo można sprawdzić, że

$$m/n < (m + m')/(n + n') < m'/n'.$$

Mediant nie leży dokładnie w połowie między swoimi rodzicami, ale leży gdzieś pośrodku. Konstrukcja ta zachowuje więc porządek i nie jest możliwe uzyskanie jednego ułamka w dwóch różnych miejscach.

Ostatnim problemem jest stwierdzenie, czy przypadkiem jakiś ułamek postaci a/b dla $a \perp b$ nie jest w drzewie Sterna-Brocota pominięty. Odpowiedź brzmi nie. Możemy bowiem zawęzić pole widzenia do bezpośredniego sąsiedztwa liczby a/b , a jest to rejon łatwo poddający się analizie. Mamy na początku

$$\frac{m}{n} = \frac{0}{1} < \left(\frac{a}{b}\right) < \frac{1}{0} = \frac{m'}{n'},$$

przy czym nawiasy naokoło $\frac{a}{b}$ oznaczają, że ułamka $\frac{a}{b}$ tam w rzeczywistości jeszcze nie ma. Jeżeli zatem na pewnym etapie konstrukcji mamy

$$\frac{m}{n} < \left(\frac{a}{b}\right) < \frac{m'}{n'},$$

to konstrukcja wymusi powstanie ułamka $(m+m')/(n+n')$ i mamy 3 przypadki. Albo $(m+m')/(n+n') = a/b$ i wygrywamy, albo $(m+m')/(n+n') < a/b$ i możemy dokonać podstawienia $m \leftarrow m+m'$, $n \leftarrow n+n'$; albo $(m+m')/(n+n') > a/b$ i możemy dokonać podstawienia $m' \leftarrow m+m'$, $n' \leftarrow n+n'$. Proces ten nie może trwać w nieskończoność, ponieważ warunki

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} > 0 \quad \text{i} \quad \frac{m'}{n'} - \frac{a}{b} > 0$$

powodują, że

$$an - bm \geq 1 \quad \text{i} \quad bm' - an' \geq 1;$$

zatem

$$(m')(an - bm) + (m)(bm' - an') \geq m' + n' + m + n;$$

co jest tym samym, co $a + b \geq m' + n' + m + n$ na mocy równania (4.31). Ze względu na to, że w każdym kroku musimy zwiększyć albo m , albo n , albo m' , albo n' , wygramy po co najwyżej $a + b$ krokach.

Ciąg Fareya rzędu N , oznaczany przez $\mathcal{F}_N$, definiuje się jako posortowany rosnąco ciąg wszystkich uproszczonych ułamków z przedziału $[0, 1]$, których mianowniki są równe co najwyżej N . Dla przykładu, $\mathcal{F}_6$ przedstawia się następująco:

$$\mathcal{F}_6 = \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}.$$

Ciąg $\mathcal{F}_N$ możemy uzyskać zaczynając od $\mathcal{F}_1 = \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$, a następnie wstawiając medianty wszędzie tam, gdzie mianownik nie stanie się zbyt duży. Nie pominiemy w ten sposób żadnych ułamków, gdyż wiemy, że konstrukcja Sterna–Brocota nie pomija żadnego z nich, i dlatego jeszcze, że mediant z mianownikiem mniejszym lub równym N nie może powstać z ułamka, którego mianownik jest większy niż N . (Innymi słowy, $\mathcal{F}_N$ określa *poddrzewo* drzewa Sterna–Brocota powstałe przez odcięcie wszystkich niechcianych gałęzi.) Wynika stąd, że gdy m/n i m'/n' są kolejnymi elementami ciągu Fareya, wówczas $m'n - mn' = 1$.

Podana metoda konstrukcji sugeruje, że $\mathcal{F}_N$ można łatwo uzyskać z $\mathcal{F}_{N-1}$: po prostu wkładamy $(m+m')/N$ między te kolejne ułamki m/n , m'/n' ciągu $\mathcal{F}_{N-1}$, których mianowniki sumują się do N . Na przykład ciąg $\mathcal{F}_7$ otrzymujemy z ciągu $\mathcal{F}_6$ wstawiając $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}$ zgodnie z podaną regułą:

$$\mathcal{F}_7 = \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}.$$

W przypadku gdy liczba N jest pierwsza, pojawi się $N-1$ nowych ułamków, w przeciwnym razie będzie ich mniej niż $N-1$, ponieważ podana metoda tworzy tylko takie liczniki, które są względnie pierwsze z N .

Dawno temu, w równaniu (4.5), wykazaliśmy, choć inaczej to wyrażaliśmy, że jeśli $m \perp n$ oraz $0 < m \leq n$, to można tak dobrać liczby całkowite a i b , że

$$ma - nb = 1. \quad (4.32)$$

(Tak naprawdę twierdziliśmy, że $m'm + n'n = \text{NWD}(m, n)$, możemy jednak podstawić 1 w miejsce $\text{NWD}(m, n)$, a w miejsce m' , b zaś w miejsce $-n'$.) Ciąg Fareya dostarcza nam nowego dowodu wzoru (4.32), ponieważ możemy przyjąć, że b/a jest ułamkiem, który bezpośrednio poprzedza m/n w ciągu $\mathcal{F}_n$. Wzór (4.5) staje się wtedy równaniem (4.31). Na przykład jednym z rozwiązań równania $3a - 7b = 1$ jest $a = 5$, $b = 2$, ze względu na to, że $\frac{2}{5}$ poprzedza $\frac{3}{7}$ w ciągu $\mathcal{F}_7$. Zastosowana konstrukcja gwarantuje dodatkowo istnienie takiego rozwiązania równania (4.32), że $0 \leq b < a < n$, jeśli $0 < m \leq n$. Podobnie, jeśli $0 \leq n < m$ i $m \perp n$, to możemy rozwiązać równanie (4.32) za pomocą $0 < a \leq b \leq m$ przyjmując, że a/b jest ułamkiem, który w ciągu $\mathcal{F}_m$ następuje po n/m .

Każde trzy kolejne wyrazy ciągu Fareya mają zadziwiającą własność udowodnioną w ćwiczeniu 61. Nie będziemy jednak zatrzymywać się dłużej nad ciągami Fareya, gdyż całe drzewo Sterna–Brocota wydaje się jeszcze bardziej interesujące.

Ze względu na to, że każdy uproszczony dodatni ułamek występuje w drzewie Sterna–Brocota tylko raz, możemy w rzeczywistości potraktować to drzewo jako *system pozycyjny* reprezentujący liczby wymierne. Użyjmy liter L i P do oznaczenia zejścia w lewo lub w prawo na drodze od korzenia drzewa do szukanego ułamka. Wtedy ciąg symboli L i P jednoznacznie określi nam pozycję w drzewie. Na przykład LPPL oznacza, że od $\frac{1}{1}$ zamierzamy pójść w lewo do $\frac{1}{2}$, potem w prawo do $\frac{2}{3}$, następnie w prawo do $\frac{3}{4}$, i w końcu w lewo do $\frac{5}{7}$. Możemy więc przyjąć, że LPPL reprezentuje liczbę $\frac{5}{7}$. Każdy dodatni ułamek może być w ten sposób reprezentowany jako jednoznaczny ciąg symboli L i P.

Na dobrą sprawę mamy tu jeden mały problem. *Pustemu* ciągowi odpowiada ułamek $\frac{1}{1}$, więc też musimy go jakoś oznaczyć. Umówmy się, że będziemy go oznaczali jako I, bo wygląda to trochę jak 1 i jednocześnie oznacza „identyczność”.

Reprezentacja ta skłania do sformułowania dwóch problemów: (1) Dla danych liczb całkowitych dodatnich m i n takich, że $m \perp n$, znaleźć ciąg złożony z L i P odpowiadający wartości m/n . (2) Dla zadanego ciągu złożonego z L i P stwierdzić, jaki ułamek jest przez niego reprezentowany. Problem (2) wygląda na prostszy, więc przyjrzyjmy mu się najpierw. Określamy

$$f(S) = \text{ułamek odpowiadający } S$$

dla S będącego ciągiem złożonym z symboli L i P . Na przykład dla ciągu $LPPL$ otrzymamy $f(LPPL) = \frac{5}{7}$.

Zgodnie z podaną konstrukcją $f(S) = (m + m')/(n + n')$, jeśli m/n i m'/n' są ułamiakami najbliższymi S z lewej i prawej strony w wyższych poziomach drzewa. Początkowo $m/n = 0/1$, a następnie sukcesywnie zastępujemy albo m/n , albo m'/n' ich medianą $(m + m')/(n + n')$, w zależności od tego, czy w drzewie schodzimy w prawo, czy w lewo.

Jak można wyrazić to zachowanie w postaci wzoru matematycznego, który byłby wygodny w użyciu? Chwila prób wystarczy, aby przekonać się, że najwygodniej jest utworzyć macierz 2×2

$$M(S) = \begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix},$$

zawierającą cztery wartości pochodzące od rodzicielskich ułamków otaczających S : m/n i m'/n' . Moglibyśmy równie dobrze umieścić m i m' na górze, a n i n' na dole, ale proponowana organizacja macierzy jest naturalniejsza, gdyż na początku całego procesu mamy $M(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a macierz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ jest tradycyjnie nazywana macierzą jednostkową I .

Krok w lewo zamienia n' na $n + n'$ oraz m' na $m + m'$, więc

$$M(SL) = \begin{pmatrix} n & n + n' \\ m & m + m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(S) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jest to szczególny przypadek ogólniejszej reguły mnożenia dwu macierzy rozmiaru 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{pmatrix}.$$

Podobnie, okazuje się, że

$$M(SP) = \begin{pmatrix} n + n' & n' \\ m + m' & m' \end{pmatrix} = M(S) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli więc zdefiniujemy L i P jako macierze 2×2

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

to stosując indukcję ze względu na długość ciągu S otrzymamy prosty wzór $M(S) = S$. Czyż nie jest to ładne? (Symbole L i P pełnią podwójną rolę: jako macierze i jako elementy alfabetu użytego do budowy S .) Na przykład

$$M(LPPL) = LPPL = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jeżeli macierze cię
przerażają, nie
denerwuj się:
występują one w tej
książce tylko tutaj.

Rodzicielskie ułamki, które otaczają $LPPL = \frac{5}{7}$, to $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$. Powyższa konstrukcja daje odpowiedź na pytanie 2:

$$f(S) = f\left(\begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix}\right) = \frac{m + m'}{n + n'}. \quad (4.34)$$

Jak wygląda sprawa z pytaniem 1? Teraz, gdy już rozumiemy podstawowy związek między węzłami drzewa i macierzami 2×2 , jest to proste. Mając parę liczb całkowitych dodatnich m i n takich, że $m \perp n$, możemy określić pozycję ułamka m/n w drzewie Sterna-Brocota za pomocą „przeszukiwania binarnego” w następujący sposób:

```
S := I;
while m/n ≠ f(S) do
  if m/n < f(S) then (wypisz(L); S := SL)
  else (wypisz(P); S := SP).
```

Wynikiem jest żądany ciąg złożony z symboli L i P.

Ten sam efekt można osiągnąć w inny sposób, modyfikując liczby m i n zamiast zmieniać stan S . Jeśli S jest dowolną macierzą rozmiaru 2×2 , to zachodzi

$$f(PS) = f(S) + 1,$$

ponieważ macierz PS różni się tym od S , że górny wiersz macierzy S został dodany do dolnego. Przyjrzyjmy się temu dokładniej, w nieco zwolnionym tempie:

$$S = \begin{pmatrix} n & n' \\ m & m' \end{pmatrix}; \quad PS = \begin{pmatrix} n & n' \\ m+n & m'+n' \end{pmatrix};$$

zatem $f(S) = (m + m')/(n + n')$, a jednocześnie $f(PS) = ((m + n) + (m' + n'))/(n + n')$. Jeśli będziemy wykonywali algorytm binarnego wyszukiwania dla ułamka m/n przy $m > n$, to pierwszą wypisaną wartością będzie P , więc następujące po tym działania algorytmu będą miały do czynienia z wartością $f(S)$ dokładnie o 1 większą, niż gdybyśmy zaczęli z liczbą $(m-n)/n$ zamiast m/n . Podobna własność zachodzi dla L , mamy więc

$$\begin{aligned} \frac{m}{n} = f(PS) &\iff \frac{m-n}{n} = f(S), & \text{gdy } m > n; \\ \frac{m}{n} = f(LS) &\iff \frac{m}{n-m} = f(S), & \text{gdy } m < n. \end{aligned}$$

Oznacza to, że algorytm wyszukiwania binarnego może zostać przekształcony

do następującej bezmacierzowej postaci:

```
while m ≠ n do
  if m < n then (wypisz(L); n := n - m)
  else (wypisz(P); m := m - n).
```

Na przykład przy danych $m/n = 5/7$, otrzymujemy w uproszczonym algorytmie kolejno

```
m = 5 5 3 1 1
n = 7 2 2 2 1
wypisz L P P L.
```

Liczby niewymierne nie występują w drzewie Sterna–Brocota, ale wszystkie „bliskie” im co do wartości liczby wymierne występują. Na przykład jeśli wypróbujemy działanie algorytmu wyszukiwania binarnego z liczbą $e = 2,71828\dots$ na wejściu zamiast ułamka m/n , to otrzymamy nieskończony ciąg symboli L, P zaczynający się od

P L P L P L L L L P L P P P P P L P L L L L L L L P L P $\dots$

Możemy uznać ten ciąg za reprezentację liczby e w systemie Sterna–Brocota, podobnie jak reprezentujemy liczbę e w dziesiętnym systemie liczbowym za pomocą ciągu cyfr dziesiętnych $2,718281828459\dots$ lub też za pomocą nieskończonego dwójkowego ułamka $(10,101101111110\dots)_2$. Interesujące, że reprezentacja Sterna–Brocota liczby e ma regularne przedstawienie

$$e = PL^0PLP^2LPL^4PLP^6LPL^8PLP^{10}LPL^{12}PL\dots;$$

jest to równoważne szczególnemu przypadkowi czegoś, co odkrył Euler [105] w wieku 24 lat.

Z reprezentacji tej wnioskujemy, że ułamki

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} P & P & L & P & P & L & P & L & L & L & L & P & L & P & P & P & P \\ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{30}{11}, \frac{49}{18}, \frac{68}{25}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{299}{110}, \frac{492}{181}, \frac{685}{252}, \frac{878}{323}, \dots \end{array}$$

są najprostszymi z możliwych górnymi i dolnymi przybliżeniami wymiernymi liczby e . Dzieje się tak dlatego, że jeśli m/n nie występuje na tej liście, to wartość pewnego ułamka z tej listy, którego licznik jest nie większy od m , a mianownik nie większy od n znajduje się pomiędzy m/n , a e , będzie to więc lepsze przybliżenie liczby e . Na przykład ułamek $\frac{27}{10}$, którego na tej liście nie znajdziemy, nie jest tak prostym przybliżeniem, jak występujący na tej liście i lepiej przybliżający e ułamek $\frac{19}{7} = 2,714\dots$

Hermann
Minkowski
przedstawił tę
zadziwiającą
reprezentację
dwójkową na
międzynarodowym
Kongresie
Matematyków
w Heidelbergu,
w roku 1904.

Dzieje się tak dlatego, że drzewo Sterna–Brocota nie dość, że zawiera wszystkie liczby wymierne, to jeszcze występują one w specyficznym porządku, w którym wszystkie ułamki o małych licznikach i mianownikach pojawiają się powyżej wszystkich ułamków bardziej złożonych. W związku z tym $\frac{27}{10} = \text{PPLPPLL}$ jest mniejsze niż $\frac{19}{7} = \text{PPLPPL}$, co z kolei jest mniejsze niż $e = \text{PPLPPLP} \dots$. Sposób ten daje nam wyśmienite przybliżenia liczby e . Liczba $\frac{878}{323} \approx 2,718266 \approx 0,999994e$ na przykład zgadza się z e dla początkowych sześciu cyfr dziesiętnych, a otrzymaliśmy ją za pomocą zaledwie 16 symboli reprezentacji Sterna–Brocota; taką samą mniej więcej dokładność uzyskalibyśmy używając 16 bitów klasycznej reprezentacji dwójkowego przybliżenia liczby e .

Nieskończoną reprezentację Sterna–Brocota dowolnej liczby niewymiernej α możemy uzyskać nieznacznie modyfikując algorytm uściślenia binarnego:

if $\alpha < 1$ then (wypisz(L); $\alpha := \alpha/(1 - \alpha)$)
 else (wypisz(P); $\alpha := \alpha - 1$).

(Kroki te trzeba powtarzać nieskończoną liczbę razy albo aż uznamy, że już nam wystarczy.)

Gdyby liczba α była wymierna, wówczas otrzymalibyśmy nieskończoną reprezentację, która przypominałaby poprzednią, z tym że na prawo od tej skończonej reprezentacji α zostałby dołączony ciąg PL^∞ . Jeżeli na przykład $\alpha = 1$, to otrzymamy $\text{PLLL} \dots$, odpowiadający nieskończonemu ciągowi ułamków $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$, który jest zbieżny do 1. Sytuacja ta jest analogiczna do zwykłej reprezentacji dwójkowej, jeżeli przedstawimy symbole L jako 0, a P jako 1. Podobnie jak w przypadku liczb rzeczywistych, gdzie każda liczba x z przedziału $[0..1)$ ma nieskończoną reprezentację dwójkową $(0, b_1 b_2 b_3 \dots)_2$ nie zakończoną samymi jedynekami, tak każda liczba α z przedziału $[0..1)$ ma nieskończoną reprezentację Sterna–Brocota $B_1 B_2 B_3 \dots$ nie zakończoną samymi symbolami P. Mamy więc zachowującą porządek wzajemnie jednoznaczność między przedziałem $[0..1)$, a przedziałem $[0..\infty)$, jeśli tylko przyjmimy, że $0 \leftrightarrow L$ i $1 \leftrightarrow P$.

Istnieje także bliski związek między algorytmem Euklidesa a reprezentacją Sterna–Brocota. Dla zadanego $\alpha = m/n$ otrzymujemy $\lfloor m/n \rfloor$ symboli P, następnie $\lfloor n/(m \bmod n) \rfloor$ symboli L, potem $\lfloor (m \bmod n)/(n \bmod (m \bmod n)) \rfloor$ symboli P, i tak dalej. Liczby $m \bmod n$, $n \bmod (m \bmod n)$, $\dots$ są po prostu liczbami, które kolejno pojawiają się przy wykonywaniu algorytmu. (Trzeba tu trochę sprytu, żeby upewnić się, że na końcu rzeczywiście nie dostaniemy nieskończenia wielu symboli P.) Zbadamy głębiej ten związek w rozdziale 6.