**Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki**
**Uniwersytetu Warszawskiego**

# Przestrzenie funkcyjne z topologią zbieżności punktowej

Henryk Michalewski

Praca doktorska
Warszawa, 15.03.2002

Promotor: dr hab. Witold Marciszewski

Pracę nad rozprawą częściowo finansowano
z grantu promotorskiego KBN nr 5PO3A 02321.

# Spis treści

# 1. Wstęp.

1.1. **Wprowadzenie.** Rozprawa poświęcona jest pewnym problemom dotyczącym topologii zbieżności punktowej w przestrzeniach funkcyjnych i pewnym problemom z zakresu teorii grup topologicznych. Dla danej przestrzeni całkowicie regularnej, przez $C_p(X)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na $X$ z topologią odziedziczoną z iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}^X$. Przestrzenie tej postaci są jednym z głównych obiektów pracy. Będziemy rozważać grupy topologiczne, o własnościach pokryciowych zbliżonych do tych, które posiadają grupy $\sigma$–zwarte. Zgodnie z twierdzeniem Gurana ([27], por. uwaga 5.3.1), grupy z rozważanych przez nas klas można traktować jako podgrupy iloczynów kartezjańskich grup metrycznych, ośrodkowych. Przytaczamy ten fakt dla podkreślenia podobieństwa między topologią przestrzeni funkcyjnych postaci $C_p(X) \subset \mathbb{R}^X$ i topologią w rozważanych przez nas grupach. W rozdziałach 5 i 7 koncentrujemy się na badaniu podgrup grupy $\mathbb{Z}^\omega$.

W rozdziale 3 wskazujemy przykłady przestrzeni całkowicie regularnych $X$, których przestrzenie funkcji $C_p(X)$ z topologią zbieżności punktowej nie są liniowo homeomorficzne z $C_p(X \times (\{0\} \cup \{\frac{1}{n+1} : n \in \omega\}))$ (mówimy wtedy, że przestrzeń $X$ nie jest *S–stabilna*), ale są liniowo homeomorficzne z $C_p(X \times \omega)$ (mówimy wtedy, że przestrzeń $X$ jest *N–stabilna*). Przykłady te dają odpowiedź na pytanie Archangielskiego ([3, Problem 4]). Przykłady 3.4 i 3.1 zostały zaprezentowane w pracy [49]. Przykład 3.4 jest przestrzenią metryzowalną; jego własności wykazujemy przy użyciu *metody nośników*, która ma szerokie zastosowanie przy badaniu własności liniowych homeomorfizmów. Między innymi, można wykazać przy jej pomocy, że jeśli dane są przestrzenie metryczne, ośrodkowe $X$ i $Y$ takie, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo homeomorficzne, to wymiar topologiczny $X$ jest równy wymiarowi topologicznemu $Y$ ([55]). W pracy [58] metoda nośników znalazła zastosowanie przy dowodzie, że istnieje przestrzeń metryczna $X$ taka, że $C_p(X)$ i $C_p(X \bigoplus X)$ nie są liniowo homeomorficzne. W istocie autor [58] podaje trzy przykłady przestrzeni metrycznych o tej własności, z których jeden używamy w paragrafie 3.4 do rozróżnienia pojęcia N–stabilności i S–stabilności. W pracy [46] metoda nośników umożliwiła skonstruowanie przestrzeni zwartej $K$ takiej, że przestrzenie $C_p(K)$ i $C_p(K) \times \mathbb{R}$ nie są liniowo homeomorficzne.

By udowodnić, że dwie przestrzenie liniowe są homeomorficzne (lub liniowo homeomorficzne) korzysta się często z technik faktoryzacyjnych, z którymi naturalnie są związane pojęcia N–stabilności i S–stabilności. Jako przykład zastosowania metody faktoryzacyjnej może służyć wynik Pełczyńskiego z zakresu przestrzeni Banacha ([28, Theorem 251]), który głosi, że nieskończenie wymiarowe podprzestrzenie uzupełnialne w przestrzeni $c_0$ są izomorficzne z $c_0$. Innym przykładem użycia techniki faktoryzacyjnej jest konstrukcja z pracy [26] homeomorfizmu między przestrzeniami $C_p([0,1])$ i $C_p(\mathbb{R})$. Technika faktoryzacyjna znajduje także zastosowanie w dowodzie twierdzenia Miljutina ([66], str. 379), że dla każdych dwóch nieprzeliczalnych przestrzeni zwartych metrycznych $K, L$, przestrzenie Banacha funkcji ciągłych $C(K)$ i $C(L)$ są liniowo izomorficzne. Jeśli $K$ i $L$ są zwartymi przestrzeniami metrycznymi i zerowymiarowymi, to przy użyciu metody faktoryzacyjnej można wykazać, że przestrzenie $C_p(K)$ i $C_p(L)$ są liniowo homeomorficzne ([6, Theorem 2.4.7]). Używając tej metody można także wykazać, że istnienie liniowego homeomorfizmu między przestrzeniami $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ ($X$ i $Y$ całkowicie regularne) nie gwarantuje, że z własności $\mathcal{P}$ przestrzeni $X$ wynika własność $\mathcal{P}$ przestrzeni $Y$, gdzie za $\mathcal{P}$ można wziąć lokalną zwartość, spełnianie pierwszego (drugiego) aksjomatu przeliczalności, metryzowalność ([6, Example 2.4.10]).

Odwzorowanie $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznych $X$ i $Y$ nazywamy *zagęszczeniem*, jeśli $f$ jest ciągłą bijekcją. Stefan Banach w Księdze Szkockiej ([65, Problem 1]) sformułował pytanie o istnienie zagęszczenia ośrodkowej przestrzeni Banacha na przestrzeń zwartą. Zauważmy, że jeśli przestrzeń Banacha $E$ jest skończenie wymiarowa, to $E$ jest lokalnie zwarta, a więc istnieje zagęszczenie $E$ na przestrzeń zwartą (por. fakt 4.1.1).

Pytkiejew ([59]) wykazał, że jeśli $X$ jest borelowską przestrzenią metryczną, ośrodkową która nie jest $\sigma$–zwarta, to istnieje zagęszczenie $X$ na kostkę Hilberta. Kulpa, w pracy [40], zauważył że z rezultatu Pytkiejewa wynika pozytywna odpowiedź na pytanie Banacha. Jak zauważyli autorzy [8], odpowiedź na pytanie Banacha można uzyskać także przy pomocy metod nieskończenie wymiarowej topologii (por. paragraf 4.4). W rozdziale 4 zajmiemy się uogólnieniem wyniku Pytkiejewa na wyższe klasy rzutowe (twierdzenie 4.1.3). Nasza metoda polega na indukcyjnej konstrukcji zagęszczenia, przez rozszerzanie ciągłej bijekcji na coraz większe zbiory w dziedzinie, przy jednoczesnym dbaniu o to, by wyczerpywać przeciwdziedzinę; w pracy [59] autor posługiwał się zbliżoną metodą, do której dodajemy technikę teoriomnogościową, która pozwala na wykroczenie poza klasę zbiorów borelowskich, pod warunkiem, że zbiór *koanalityczny* (zbiór $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$) dysponuje dodatkową, wygodną strukturą. Mowiąc dokładniej, jest nam potrzebne, by dany zbiór był *zupełny ze względu na klasę zbiorów* koanalitycznych (na klasę $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$). Jak się okazuje, zbiory rozważane przez nas w zastosowaniach mają tą własność. Będziemy także posługiwać się *twierdzeniami o uniformizacji* (zob. paragraf 2.7) dla danej klasy zbiorów, które głoszą, że dla zbioru $A \subset X \times Y$ należącego do określonej klasy, można znaleźć zbiór $B \subset A$, który należy do tej samej klasy i taki, że dla każdego $x \in X$, jeśli istnieje $y \in Y$, $(x, y) \in A$ to istnieje dokładnie jeden $y_0 \in Y$ taki, że $(x, y_0) \in B$. Twierdzenie o uniformizacji zachodzi dla klasy zbiorów koanalitycznych co dowodzi, że zbiory koanalityczne stanowią interesujące rozszerzenie klasy zbiorów borelowskich.

Archangielski rozpatrywał problem istnienia słabszych topologii zwartych na przestrzeniach funkcyjnych postaci $C_p(X)$. Archangielski wykazał ([2]), że jeśli $X$ jest metryzowalną przestrzenią $\sigma$–zwartą, to przestrzeń $C_p(X)$ można zagęścić na przestrzeń zwartą, metryczną. Postawił przy tym hipotezę, że dla przestrzeni Baire'a $\omega^\omega$ nie istnieje zagęszczenie $C_p(\omega^\omega)$ na przestrzeń zwartą. Przypomnijmy, że $\omega^\omega$ to przeliczalna potęga kartezjańska zbioru liczb naturalnych $\omega$.

Christensen wykazał ([16], dowód Theorem 3.7), że jeśli $X$ jest przestrzenią $\sigma$–zwartą, to istnieje borelowskie, różnowartościowe odwzorowanie przestrzeni $C_p(X)$ na przestrzeń $[0, 1]^\omega$. W książce [16] sformułowany jest problem (Problem 7), czy istnieje różnowartościowe odwzorowanie borelowskie z przestrzeni $C_p(\omega^\omega)$ na przestrzeń $[0, 1]^\omega$. Pytanie motywowane jest obserwacją ([16], Corollary z Theorem 0.3 i w większej ogólności, [16], Theorem 3.7), że przestrzeń $C_p(\omega^\omega)$ nie jest ciągłym obrazem przestrzeni $\omega^\omega$; w paragrafie 4.2.1, posiłkując się rezultatami z pracy [1] i naszym twierdzeniem 4.1.3, pogłębimy tą uwagę Christensena i damy pozytywną odpowiedź na problem 7 z jego książki, a jednocześnie wykażemy, że hipoteza Archangielskiego nie zachodzi. Dokładniej, wykażemy, że jeśli $X$ jest metryczną, ośrodkową przestrzenią analityczną, która nie jest $\sigma$–zwarta, to istnieje zagęszczenie przestrzeni $C_p(X)$ na kostkę Hilberta $I^\omega$. Co więcej, przy założeniu Determinacji Rzutowej (por. paragraf 2.7) wykażemy, że jeśli $X$ jest metryczną, ośrodkową przestrzenią rzutową, która nie jest $\sigma$–zwarta, to przestrzeń $C_p(X)$ zagęszcza się na kostkę Hilberta. Powyższy wynik, wraz z twierdzeniem 4.1.3, został zaprezentowany w pracy [50]. Razem z rezultatem z pracy [2] (który pokrywa przypadek $\sigma$–zwartej metrycznej, ośrodkowej przestrzeni

$X$), otrzymujemy twierdzenie, że dla każdej przestrzeni $X$ metrycznej, ośrodkowej, analitycznej, przestrzeń $C_p(X)$ zagęszcza sie na przestrzeń zwartą, a przy dodatkowym założeniu Determinacji Rzutowej, twierdzenie rozszerza sie na klasę zbiorów rzutowych. Dla zbioru analitycznego $A$, który nie jest $\sigma$–zwarty, jest możliwa konstrukcja zagęszczenia z przestrzeni $C_p(A)$ na $I^\omega$, gdyż z przestrzenią $C_p(A)$ w sposób naturalny związana jest pewna przestrzeń koanalitycznie–zupełna.

Marciszewski w [45] skonstruował, przy założeniu teoriomnogościowym słabszym od aksjomatu Martina ($\mathfrak{d} = 2^\omega$), przykład przestrzeni metrycznej, ośrodkowej $X$ takiej, że $C_p(X)$ nie zagęszcza się na żadną przestrzeń $\sigma$–zwartą, Hausdorffa. Wynika z tego, że naszego wyniku o zagęszczeniach z paragrafu 4.2.1 nie da się rozszerzyć, bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych, na wszystkie przestrzenie metryczne, ośrodkowe.

W paragrafie 4.3 wykażemy, że jeśli $A$ jest zbiorem koanalitycznie-zupełnym i zerowymiarowym, to każdy nieprzeliczalny zbiór analityczny można przedstawić jako ciągły, różnowartościowy obraz zbioru $A \bigoplus \omega$, sumy dyskretnej przestrzeni $A$ i przestrzeni liczb naturalnych. Slaman wykazał ([68]), w odpowiedzi na pytanie Sierpińskiego ([67]), że istnieje podprzestrzeń $X$ przestrzeni $\omega^\omega$ o tej własności, że każdy nieprzeliczalny zbiór analityczny można przedstawić jako ciągły, różnowartościowy obraz $X$. Hjorth wykazał ([31]), w oparciu o rozumowania z zakresu teorii rekursji, że istnieje koanalityczny zbiór o tej własności i co więcej, że przy założeniu Determinacji Analitycznej, jeśli $A$ jest zbiorem koanalitycznym nieborelowskim, to każdy zbiór analityczny można przedstawić jako ciągły różnowartościowy obraz zbioru $A \bigoplus \omega$. O ile zachodzi aksjomat Determinacji Analitycznej to każdy zbiór koanalityczny nieborelowski jest koanalitycznie-zupełny, tak więc nasz wynik można uznać za uogólnienie obydwu wyników Hjortha.

Paragraf 4.4 zawiera uwagę, której dowód jest oparty na argumencie zasugerowanym przez Romana Pola, że każda przestrzeń Banacha (niekoniecznie ośrodkowa), daje się zagęścić na pewną przestrzeń zwartą. Odpowiemy w ten sposób na pytanie T. Banakha i Pliczko z pracy [8].

W rozdziałach 5, 6, 7 będziemy zajmować się pewnymi pojęciami, które uogólniają pojęcie $\sigma$–zwartości w klasie grup topologicznych. Wszystkie wyniki przedstawione w tych rozdziałach zostały uzyskane wspólnie z Adamem Krawczykiem. Materiał w rozdziałach 5 i 7 dotyczy w przeważającej mierze grup metrycznych, ośrodkowych, a głównie podgrup iloczynu $\mathbb{Z}^\omega$. To daje możliwość stosowania metod teoriomnogościowych, które zostały rozwinięte dla przestrzeni metrycznych, ośrodkowych. W latach dwudziestych, poszukując charakteryzacji pojęcia $\sigma$–zwartości w terminach pokryciowych, Menger wprowadził w pracy [47] specjalną klasę zbiorów, zwanych dziś zbiorami z *własnością Mengera*. Zdefiniowana przez niego własność pokryciowa okazała się rozmijać z $\sigma$–zwartością; poświeconą jest jej bogata literatura (por. [61], [23]). Choć nie korzystamy z żadnych gotowych rezultatów dotyczących zbiorów z własnością Mengera, wiele naszych wyników motywowanych jest analogicznymi twierdzeniami dla zbiorów z tą własnością. Analizie tych analogii poświęcona jest uwaga 7.2.2, gdzie podajemy definicję zbioru z własnością Mengera.

W rozdziale 5, posługując się dodatkowymi założeniami teoriomnogościowymi wykażemy, że pewna klasa grup topologicznych — klasa grup o–ograniczonych, nie jest zamknięta ze względu na branie produktów; to daje odpowiedź na pytanie postawione przez Tkaczenkę ([73], Problem 3.2) i Hernandeza ([30], Problem 5.2). Podajemy dwie niezależne konstrukcje. Konstrukcja z paragrafu 5.2 pochodzi ze wspólnej pracy z Adamem Krawczykiem ([39]); przeprowadzamy ją przy założeniu, że zachodzi Hipoteza Continuum (a w istocie słabszy aksjomat teoriomnogościowym wynikający z aksjomatu Martina, który można wysłowić jako równość $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{d}$). Konstrukcja z paragrafu 5.4 jest przprowadzona przy dodatkowym założeniu, że istnieją dwa ultrafiltry, które nie są *podobne* (termin ten jest objaśniony w paragrafie 5.4). W pracy [29] podano przykład grupy metrycznej ośrodkowej $G$, której kwadrat $G \times G$ nie jest o–ograniczony; autorzy sądzili, że uzyskali w ten sposób dowód, że klasa grup o–ograniczonych nie jest zamknięta na branie produktów. Okazało się jednak, co zostało nam zakomunikowane przez Michaiła Tkaczenkę i co opisujemy w paragrafie 5.1, że już grupa $G$ nie jest o–ograniczona (wbrew twierdzeniu z Example 6.1,[30]). W uwadze 5.3.1 wykazujemy, że jeśli istnieją o–ograniczone grupy $G, H$ takie, że $G \times H$ nie jest grupą o–ograniczoną, to istnieją $G'$, $H'$ o–ograniczone grupy metryczne, ośrodkowe takie, że $G' \times H'$ nie jest grupą o–ograniczoną.

W rozdziale 6 wskażemy przykład grupy topologicznej, która w sensie struktury topologicznej jest *P–przestrzenią* Lindelofa, ale która nie jest grupą silnie o–ograniczona. Nasz przykład odpowiada na pytania Hernandeza i Tkaczenki. Konstrukcja, której będziemy używać, pojawiała się wcześniej w literaturze. W pracy [56] podano przykład przestrzeni Banacha postaci $C(K)$, która w swojej słabej topologii jest przestrzenią Lindelofa, ale która nie jest generowana przez żaden zbiór słabo zwarty. Nasza grupa, z nieco inną topologią, posłużyła do wygenerowania przestrzeni $C(K)$. Pojęcie silnej o–ograniczoności wyrażone jest w terminach istnienia strategii wygrywającej w grze, w której celem jest pokrycie danej grupy przy pomocy zbiorów otwartych. W pracach [71],[63] ta sama grupa była użyta do pokazania, że nie ma strategii wygrywającej w innych grach pokryciowych.

Jak zauważył Hernandez ([30], Theorem 2.4), każda grupa topologiczna która jest P–przestrzenią Lindelofa, jest o–ograniczona. Przypuszczenie, że dana grupa jest P–przestrzenią Lindelofa daje istotną informację na temat jej własności pokryciowych; stąd pytanie Hernandeza ([30], Problem 2.5), czy każda taka grupa jest silnie o–ograniczona. Nasz przykład pokazuje, że takie wynikanie nie zachodzi; tym samym jest to przykład grupy o–ograniczonej, która nie jest silnie o–ograniczona. W pracy [30] został zaproponowany przykład grupy topologicznej (Example 6.1,[30]), który miała posiadać taką własność, jednak okazało się, że konstrukcja zawiera błąd, który analizujemy w paragrafie 5.1. Przykład o–ograniczonej grupy topologicznej, która nie jest silnie o–ograniczona, został podany w pracy [29] (Theorem 3.1), przy dodatkowym teoriomnogościowym założeniu $\diamondsuit$. Wydaje się, że nasz przykład to pierwsza konstrukcja grupy o tej własności, przeprowadzona bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych.

Co więcej, nasza grupa jest o–ograniczona i każdy jej ciągły obraz homomorficzny, o ile ma przeliczalną bazę, jest silnie o–ograniczony, natomiast sama grupa nie jest silnie o–ograniczona. Faktycznie, w pracy [29] (Lemma 2.2) zostało wykazane, że każdy metryczny, ośrodkowy i ciągły obraz homomorficzny grupy będącej P–przestrzenią Lindelofa, jest przeliczalny. Przy dodatkowym założeniu teoriomnogościowym $\diamondsuit$ podobny przykład, o nieco słabszych własnościach, został podany w [29] (Theorem 3.1) po to, by udzielić odpowiedzi na pytanie postawione w [73] (Problem 3.3), [30] (Problem 4.2). Wydaje się, że rozpatrywana przez nas grupa jest pierwszym przykładem odpowiadającym na powyższe pytanie, który udało się uzyskać bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych. Wyniki rozdziału 6 pokrywają się z wynikami ze wspólnej pracy z Adamem Krawczykiem ([38]).

W rozdziale 7 wykażemy, że metryczne, abelowe grupy silnie o–ograniczone są podgrupami grup $\sigma$–zwartych. Wnioskujemy stąd, że klasa grup silnie o–ograniczonych metrycznych, ośrodkowych i abelowych jest zamknięta na branie iloczynów kartezjańskich. W tym samym rozdziale, w paragrafie 7.2, wykażemy, że istnieje abelowa grupa metryczna $G$, ośrodkowa i o–ograniczona, która nie jest silnie o–ograniczona. Wydaje się, że grupa $G$ i grupa rozważana przez nas w rozdziale 6 to pierwsze przykłady grup o tej własności, uzyskane bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych. Klasa grup silnie o–ograniczonych jest definiowana przy użyciu gry $\Gamma$ (por. paragraf 6.2). Udowodnimy, że gra $\Gamma(G)$ nie jest zdeterminowana; to daje odpowiedź na pytanie z pracy [29].

1.2. **Podziękowania.** Praca została napisana pod kierunkiem pana dr. hab. Witolda Marciszewskiego, któremu chciałbym gorąco podziękować za opiekę naukową i pomoc. Wdzięczny jestem także panu prof. Romanowi Polowi za zasugerowanie niektórych tematów badawczych, które zostały opracowane w tej rozprawie, za konstultacje których udzielił, a także za krytyczne uwagi, które pozwoliły znacząco ulepszyć niektóre fragmenty pracy.

Pan Adam Krawczyk jest współautorem dwóch artykułów, które weszły w skład tej rozprawy. Praca z nim była dla mnie bardzo dużą przyjemnością.

Materiał przedstawiony w rozdziale 6 był dyskutowany podczas konferencji w Zahradkach (Czechy, 2000); Uri Abraham, Mirna Dzamonja, Michal Hrusak i Justin Moore poddali pewne idee, które pozwoliły usunąć dodatkowe założenie teoriomnogościowe $\diamondsuit$ z naszego rozumowania.

Za pomoc materialną jestem wdzięczny swoim rodzicom. Marcin Mucha podarował mi monitor komputerowy, dzięki czemu mogłem pisać tą pracę w domu. Jestem mu za to bardzo zobowiązany.

## 2. Wiadomości wstępne.

2.1. **Przedłużanie przekształceń.** Będziemy posługiwać się następującym odpowiednikiem twierdzenia Tietzego w klasie przestrzeni całkowicie regularnych:

**Twierdzenie 2.1.1** (Lemma 6.4.2 w [52])**.** *Niech $X$ będzie przestrzenią całkowicie regularną. Niech $F \subset X$ będzie zbiorem skończonym i niech $h : F \to [a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy istnieje funkcja ciągła $g : X \to [a,b]$ taka, że $g|F = h$.*

2.2. **Przestrzenie Lindelofa.** Przestrzeń topologiczna $X$ jest *przestrzenią Lindelofa*, jeśli z każdego pokrycia otwartego przestrzeni $X$ można wybrać podpokrycie przeliczalne. Klasa przestrzeni Lindelofa jest zamknięta ze względu na branie przeliczalnych sum ([19], twierdzenie 3.8.7) oraz ciągłych obrazów ([19], twierdzenie 3.8.5). Co więcej, jeśli $X$ jest przestrzenią Lindelofa, $Y \subset X$ jest podzbiorem domkniętym, to przestrzeń $Y$ także jest przestrzenią Lindelofa ([19], twierdzenie 3.8.4).

2.3. **Przestrzeń $C_p(X)$.** Dla danej przestrzeni całkowicie regularnej, przez $C_p(X)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na $X$ z topologią odziedziczoną z iloczynu kartezjańskiego $\mathbb{R}^X$. Książki [52] i [4] zawierają wiele informacji na temat tej klasy przestrzeni.

Rodzina zbiorów

$$\{\{g \in C_p(X) : |f(x_i) - g(x_i)| < \epsilon \text{ dla } i = 1, \dots n\} : \{x_i\}_{i=1,\dots n} \subset X, \epsilon > 0\}\}$$

jest bazą otoczeń punktu $f$ w przestrzeni $C_p(X)$. Przestrzeń $C_p(X)$ jest przestrzenią liniowo–topologiczną, a więc w szczególności $C_p(X)$ jest grupą topologiczną ze względu na operację dodawania funkcji. Przestrzeń $C_p(X)$ jest gęstym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^X$.

Dla danych przestrzeni całkowicie regularnych $X$ i $Y$ mówimy, że przestrzeń $C_p(X)$ jest *liniowo homeomorficzna* z przestrzenią $C_p(Y)$ jeśli istnieje homeomorfizm między $C_p(X)$ i $C_p(Y)$, który jest przekształceniem liniowym.

**Fakt 2.3.1.** *Jeśli dana jest rodzina przestrzeni całkowicie regularnych $X_i$ $(i \in I$, $I$ dowolny zbiór indeksów), to przestrzeń $C_p(\bigoplus_{i\in I} X_i)$ jest liniowo homeomorficzna z przestrzenią $\Pi_{i\in I} C_p(X_i)$.*

*Dowód.* Dla $f \in C_p(\bigoplus_{i\in I} X_i)$ liniowy homeomorfizm $F : C_p(\bigoplus_{i\in I} X_i) \to \Pi_{i\in I} C_p(X_i)$ zadajemy wzorem $F(f) = (\{f|X_i\}_{i\in I})$. $\square$

Jeśli $X$ jest przestrzenią całkowicie regularną i $D \subset X$ jest dowolnym podzbiorem, to przez $\pi_D$ oznaczamy odwzorowanie przestrzeni $\mathbb{R}^X$ w $\mathbb{R}^D$ przypisujące $f \in \mathbb{R}^X$ obcięcie $f|D$. *Przestrzeń* $C_D(X)$ definiujemy jako $\pi_D(C_p(X))$.

2.4. **Przestrzenie Baire'a.** Przestrzeń topologiczną $X$ nazywamy *przestrzenią Baire'a*, jeśli dla każdej rodziny zbiorów otwartych i gęstych $U_n \subset X$ $(n \in \omega)$ część wspólna $\bigcap_{n\in\omega} U_n$ jest zbiorem gęstym w $X$. Zauważmy, że przestrzeń $X$ jest przestrzenią Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej rodziny zbiorów $F_n$ $(n \in \omega)$ domkniętych, nigdziegęstych w $X$ suma $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ jest zbiorem brzegowym.

Przestrzeń topologiczną $X$ nazywamy *przestrzenią dziedzicznie Baire'a*, jeśli dla każdego domkniętego podzbioru $F \subset X$, przestrzeń $F$ jest przestrzenią Baire'a. Zachodzi

**Twierdzenie 2.4.1** (Oxtoby, [54])**.** *Jeśli $X$ jest metryzowalną, ośrodkową przestrzenią Baire'a, to przestrzeń $X^\omega$, rozpatrywana z topologią produktową, jest także przestrzenią Baire'a.*

Literą $S$ oznaczamy przestrzeń $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \omega\}$ z topologią odziedziczoną z $\mathbb{R}$.

**Fakt 2.4.2.** *Dla niepustej przestrzeni całkowicie regularnej $X$, przestrzeń $C_p(X \times S)$ nie jest przestrzenią Baire'a.*

*Dowód.* Niech $x_0 \in X$ będzie dowolnym punktem. Zbiór

$$F_n = \{f \in C_p(X \times S) : \forall_{k\in\omega}\ f(x_0, \frac{1}{k+1}) \in [-n; n]\}$$

jest domknięty. Zbiór $F_n$ jest także nigdziegęsty. Istotnie, niech $f \in C_p(X \times S)$ będzie dowolną funkcją. Weźmy bazowe otoczenie $V = \{g \in C_p(X\times S) : |g(x_i, \frac{1}{k_i+1}) - f(x_i, \frac{1}{k_i+1})| < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n\}$ dla pewnych $\{x_i\}_{i=1,\ldots n} \subset X$, $\{k_i : i = 1, \ldots, n\} \subset \omega$, $\epsilon > 0$. Niech $l_0 \in \omega \setminus \{k_i\}_{i=1\ldots n}$. Określamy $h : \{x_i, \frac{1}{k_i+1}\}_{\{i=1\ldots n\}} \cup \{x_0, \frac{1}{l_0+1}\} \to \mathbb{R}$ jako $h(x_i, \frac{1}{k_i+1}) = f(x_i, \frac{1}{k_i+1})$ $(i = 1, \ldots, n)$, $h(x_0, \frac{1}{l_0+1}) = n + 1$. Przestrzeń $X \times S$ jest całkowicie regularna, zbiór $\{(x_i, \frac{1}{k_i+1}\}_{i=1,\ldots,n} \cup \{(x_0, \frac{1}{l_0+1})\} \subset X \times S$ jest skończony. Zgodnie z twierdzeniem 2.1.1, istnieje funkcja $g$ będąca rozszerzeniem $h$ na przestrzeń $X \times S$. Zauważmy, że $g \in V$, ale $g \notin F_n$, gdyż $g(x_0, \frac{1}{l_0+1}) = n + 1$.

Zauważmy, że jeśli $f \in C_p(X \times S)$ to istnieje $n \in \omega$ takie, że $f[\{x_0\} \times S] \subset [-n; n]$ dla pewnego $n \in \omega$, gdyż przestrzeń $\{x_0\} \times S$ jest zwarta. Zatem dla każdego $f \in C_p(X \times S)$ istnieje $n \in \omega$ takie, że $f \in F_n$.

Podsumowując, zachodzi równość $C_p(X \times S) = \bigcup F_n$, każdy ze zbiorów jest domknięty i nigdziegęsty, zatem $C_p(X \times S)$ nie jest przestrzenią Baire'a. $\square$

2.5. **Własności topologii na liczbach porządkowych.** Jeśli $\alpha$ jest liczbą porządkową, to istnieje na niej naturalna topologia porządkową, dla której bazę stanowią odcinki otwarte $(\beta, \gamma)$ $(\beta < \gamma \leq \alpha)$ oraz odcinki $[0, \beta)$ $(\beta < \alpha)$. Zbiór $C \subset \alpha$ jest *nieograniczony*, jeśli dla każdej liczby $\beta < \alpha$ istnieje $\gamma \in C$, $\gamma \geq \beta$. Będziemy potrzebowali dodatkowych informacji o podzbiorach $\omega_1$. Zbiór $A \subset \omega_1$ jest stacjonarny, jeśli dla każdego zbioru domkniętego i nieograniczonego $C \subset \omega_1$ zachodzi $A \cap C \neq \emptyset$. Zbiór $A \subset \omega_1$ jest *niestacjonarny* jeśli $A \cap C = \emptyset$ dla pewnego zbioru domkniętego i nieograniczonego $C$. Funkcja $f : A \to \omega_1$ jest *regresywna*, jeśli dla każdego $\alpha \in A, \alpha \neq 0$ zachodzi $f(\alpha) < \alpha$.

**Lemat 2.5.1** (Fodor, [32], Theorem 22)**.** *Dla każdego zbioru stacjonarnego $A$ i każdej funkcji regresywnej $f : A \to \omega_1$ istnieje zbiór stacjonarny $B \subset A$ na którym funkcja $f$ jest stała.*

**Fakt 2.5.2** ([32], Theorem 7.4)**.** *Część wspólna przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych i nieograniczonych w $\omega_1$ jest domknięta i nieograniczona w $\omega_1$. Suma przeliczalnie wielu zbiorów niestacjonarnych jest niestacjonarna.*

**Fakt 2.5.3.** *Dla każdej funkcji ciągłej $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ istnieje $\alpha < \omega_1$ takie, że $f(\beta) = f(\alpha)$ dla każdego $\beta \geq \alpha$.*

2.6. **Przestrzeń zbiorów zwartych $\mathcal{K}(X)$.** Jeśli $(X, d)$ jest przestrzenią metryczną, to definiujemy przestrzeń $\mathcal{K}(X)$ jako rodzinę wszystkich niepustych zwartych podzbiorów $X$ wraz z metryką Hausdorffa

$$\mathrm{dist}(K, H) = \max\{\sup_{x \in K} d(x, H), \sup_{x \in H} d(x, K)\}$$

2.7. **Zbiory borelowskie i rzutowe.** Przestrzeń topologiczna $X$ jest *przestrzenią polską*, jeśli $X$ jest ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny. Wszystkie wyniki i pojęcia z zakresu deskryptywnej teorii mnogości będą stosowane w odniesieniu do podzbiorów przestrzeni polskich.

Niech $X$ będzie ustaloną przestrzenią polska. Podzbiór $B \subset X$ jest *borelowski*, jeśli $B$ należy do najmniejszego $\sigma$–ciała generowanego przez podzbiory otwarte przestrzeni $X$. Każdy zbiór, który można przedstawić jako przecięcie przeliczalnie wielu zbiorów otwartych w $X$, nazywamy *zbiorem typu* $G_\delta$ *w* $X$. Każdy zbiór, który można przedstawić jako sumę przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych w $X$, nazywamy *zbiorem typu* $F_\sigma$ *w* $X$. Funkcja $f : X \to Y$ jest *borelowska*, jeśli przeciwobraz zbioru otwartego w $X$ jest zbiorem otwartym w $Y$. Funkcja $f : X \to Y$ jest *borelowskim izomorfizmem*, jeśli $f$ jest bijekcją i $f, f^{-1}$ są funkcjami borelowskimi.

Mówimy, że przestrzeń $X$ należy do klasy $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ lub, równoważnie, że $X$ jest zbiorem *analitycznym*, jeśli istnieje ciągłe odwzorowanie z przestrzeni liczb niewymiernych $\omega^\omega$ na przestrzeń $X$.

Jeśli $X$ jest podzbiorem przestrzeni polskiej $Y$, to mówimy, że $X$ należy do klasy $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$ lub, równoważnie, że $X$ jest zbiorem *koanalitycznym*, jeśli dopełnienie zbioru $X$ w przestrzeni $Y$ jest zbiorem analitycznym.

Klasa $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ jest zdefiniowana jako klasa tych przestrzeni metrycznych, ośrodkowych, które można przedstawić jako ciągły obraz pewnego elementu z klasy $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_1$. Ich dopełnienia w przestrzeniach polskich oznacza się jako $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_2$; dla każdego $n \in \omega$ definiujemy przez indukcje, posługując się tymi samymi określeniami, klasy zbiorów $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ oraz $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$. Wszystkie te klasy nazywa się *klasami rzutowymi*.

Gdziekolwiek będziemy używać symbolu $\Gamma$ na określenie rodziny zbiorów, będziemy przypuszczali, że opisuje on jedną z klas $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ lub $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ $(n \geq 1)$. Dla ustalonej przestrzeni $X$, symbol $\Gamma(X)$ opisuje rodzinę $\{A \subset X : A \in \Gamma\}$. Można sprawdzić ([35], Proposition 37.1), że jeśli $X$ jest przestrzenią polską to zbiór $A$ należy do klasy $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(X)$ $(n \geq 2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $B \in \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}(X \times 2^\omega)$ taki, że $A = \pi_X B$, gdzie $\pi_X : X \times 2^\omega \to X$ jest rzutowaniem $\pi_X(x, y) = x$. Klasy rzutowe $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n, \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$, dla $n > 0, n \in \omega$, są zamknięte ze względu na branie otwartych i domkniętych podzbiorów (ogólniej: borelowskich podzbiorów), przeliczalnych sum i przecięć, homeomorficznych obrazów, borelowskich izomorfizmów i ciągłych przeciwobrazów ([35], Proposition 37.1).

Wprost z definicji wnioskujemy, że każdy zbiór borelowski jest analityczny oraz koanalityczny a także, że zachodzą zawierania $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n, \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n \subset \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n+1} \cap \undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$. Jeśli dane są przestrzenie

$X, Y$ to zbiór $U \subset X \times Y$ jest *uniwersalnym dla klasy* $\Gamma(Y)$, jeśli dla każdego $A \in \Gamma(Y)$ istnieje $x \in X$ taki, że $A = \{y \in Y : (x, y) \in U\}$. Zachodzi

**Twierdzenie 2.7.1** ([35], Theorem 37.7). *W klasach* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(2^\omega \times 2^\omega), \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(2^\omega \times 2^\omega)$ *istnieją zbiory uniwersalne dla* $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(2^\omega), \underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(2^\omega)$ *($n \geq 1$).*

O zbiorze uniwersalnym z klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ można wykazać, że nie należy on do klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ i podobnie, o zbiorze z klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ można wykazać, że nie należy on do klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$.

Zachodzą następujące

**Twierdzenie 2.7.2** ([35], Theorem 14.12). *Jeśli $f : X \to Y$ jest borelowską bijekcją między borelowskimi podprzestrzeniami $X$, $Y$ pewnych przestrzeni polskich, to $f^{-1}$ jest funkcją borelowska.*

**Twierdzenie 2.7.3** ([35], Theorem 14.11). *Jeśli $A \subset X$ jest analitycznym podzbiorem przestrzeni polskiej $X$ oraz $X \setminus A$ także jest podzbiorem analitycznym, to $A$ jest zbiorem borelowskim.*

**Twierdzenie 2.7.4** ([35], Exercise 14.13). *Zbiór analityczny jest przeliczalny lub zawiera homeomorficzną kopię zbioru Cantora.*

Mówimy, że zbiór $X$ w przestrzeni polskiej $Y$ jest *co najmniej*–$\Gamma$ ($\Gamma$–hard, zob. [35], def. 22.9) jeśli dla każdego zbioru $C \in \Gamma(2^\omega)$ istnieje ciągłe odwzorowanie $f : 2^\omega \to Y$ takie, że $C = f^{-1}[X]$. Taką funkcję nazywamy *redukcją zbioru $C$ do zbioru $X$*. W dalszym ciągu będzie potrzebowali dodatkowej własności funkcji $f$; dokładniej, będzie nam potrzebne

**Twierdzenie 2.7.5.** *(Louveau,Saint–Raymond* [42]*, Exercise 26.11 w książce* [35]*) Jeśli $X$ jest zbiorem co najmniej–$\Gamma$ w przestrzeni polskiej $Y$, to dla każdego $C \in \Gamma(2^\omega)$ istnieje ciągłe, różnowartościowe przekształcenie $f : 2^\omega \to Y$ takie, że $C = f^{-1}[X]$.*

Zwróćmy uwagę, że z powyższego twierdzenia wynika

*Uwaga* 2.7.6. (Louveau, Saint–Raymond) Jeśli $X$ jest przestrzenią co najmniej–$\Gamma$ to $X$ zawiera domknięte homeomorficzne kopie wszystkich elementów $\Gamma(2^\omega)$.

Mówimy, że $X$ is $\Gamma$-*zupełny* jeśli $X$ jest co najmniej-$\Gamma$ i $X \in \Gamma$. Istnieje wiele naturalnych przykładów zbiorów analitycznie, koanalitycznie-zupełnych pochodzących z badań nad szeregami Fouriera, teorią wymiaru, teorią funkcji rzeczywistych, teorią continuów ([35], rozdziały 27,33). Jeden przykład będzie dla nas szczególnie ważny

**Twierdzenie 2.7.7.** *(Hurewicz, Section 12 w* [22] *lub Corollary 3(iii) w* [34]*) Zbiór $\mathcal{K}(\mathbb{Q})$ jest koanalitycznie–zupełny, gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych.*

Zauważmy także, że zbiory $\Gamma$-uniwersalne, wskazane w twierdzeniu 2.7.1 są $\Gamma$–zupełne.

*Aksjomat Determinacji Rzutowej* (*Determinacja Rzutowa*) jest założeniem teoriomnogościowym podającym pewne informacje na temat istnienia strategii wygrywających w tak zwanych grach rzutowych; dokładna postać tego aksjomatu nie będzie miała dla nas znaczenia. Można udowodnić, że ten aksjomat zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dostatecznie duże liczby kardynalne (por. [35], paragraf 26.B). Używając podstawowych aksjomatów Zermelo–Fraenkla (*w ZFC*) można wykazać, że niesprzecznie aksjomat Determinacji Rzutowej jest fałszywy. W ZFC można także wykazać, że nie można wykazać niesprzeczności aksjomatu Determinacji Rzutowej z pozostałymi aksjomatami ZFC; tak więc jest to założenie nieco innego typu, niż na przykład Hipoteza Continuum (CH), aksjomat Martina, czy zasada $\diamondsuit$.

*Aksjomat Determinacji Analitycznej* (*Determinacja Analityczna*) jest dodatkowym założeniem teoriomnogościowym, który wynika z Determinacji Rzutowej; używając podstawowych aksjomatów Zermelo–Fraenkla (*w ZFC*) można wykazać, że niesprzecznie aksjomat Determinacji Analitycznej jest fałszywy. W ZFC można także wykazać, że nie można wykazać niesprzeczności aksjomatu Determinacji Analitycznej z pozostałymi aksjomatami ZFC.

Dla klasy $\Gamma$ mówimy, że ma ona *własność uniformizacji*, jeśli dla pary przestrzeni polskich $X, Y$ oraz $A \in \Gamma(X \times Y)$ istnieje $B \in \Gamma(X \times Y)$ taki, że dla każdego $x \in X$, jeśli $x \in \pi_X(A)$ to istnieje i to dokładnie jeden $y \in Y$ taki, że $(x,y) \in B$, gdzie $\pi_X : X \times Y \to X$ jest rzutowaniem zdefiniowanym wzorem $\pi_X(x,y) = x$. Będziemy potrzebowali następującego

**Twierdzenie 2.7.8.** *(Moschovakis, Corollary 39.9 w* [35]*) Przypuśćmy, że spełniony jest aksjomat Determinacji Rzutowej. Niech $A$ będzie zbiorem z klasy $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ $n \geq 3, n \in \omega$. Wtedy istnieje zbiór $C \subset 2^\omega$ z klasy $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ oraz ciągła bijekcją ze zbioru $C$ na $A$.*

*Dowód.* Właściwy wynik Moschovakisa (Corollary 39.9, [35]) głosi, że przy założeniu Determinacji Rzutowej klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{2k+2}$ oraz $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{2k+1}$ ($k \in \omega$) mają własność uniformizacji. Niech $A$ będzie podzbiorem przestrzeni polskiej $Y$, $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n(Y)$ ($n \geq 3, n \in \omega$). Z definicji klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ istnieje wtedy $C_0 \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}(2^\omega)$ oraz ciągłe odwzorowanie $f : C_0 \to Y$ takie, że $A = f[C_0]$.

Definiujemy homeomorfizm $F : C_0 \to Y \times 2^\omega$ przy pomocy wzoru $F(x) = (f(x), x)$. Zbiór $G_0 = \{(y, x) \in C_0 \times 2^\omega : f(x) = y\} = F[C_0]$ jest homeomorficzny z $C_0$, a zatem należy do klasy $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}(Y \times 2^\omega)$. Zgodnie z twierdzeniem Moschovakisa, klasa $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}$ lub klasa $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$ ma własność uniformizacji; w szczególności, istnieje $G_1 \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n(Y \times 2^\omega)$, $G_1 \subset G_0$ taki, że dla każdego $y \in A$ istnieje dokładnie jeden $x \in 2^\omega$, taki, że $(y, x) \in G_1$. Definiujemy $C_1 = F^{-1}[G_1] \subset 2^\omega$. Skoro zbiór $C_1$ jest homeomorficznym obrazem $G_1$, to należy on do klasy $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$. Biorąc pod uwagę to, że z warstw funkcji $f$ wybieraliśmy po dokładnie jednym punkcie, funkcja $f$ ograniczona do $C_1$ jest różnowartościowa oraz $A = f[C_1]$. $\square$

W przypadku klas $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ i $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$ założenie o Determinacji Rzutowej nie jest potrzebne:

**Twierdzenie 2.7.9.** *(Mazurkiewicz, Th. 39.3 w [41] dla $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$, Kondo, Th. 36.14 w [35] dla $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$) Niech $A$ będzie elementem klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_2$. Wtedy istnieje $C$, koanalityczny podzbiór zbioru Cantora, oraz ciągła bijekcja ze zbioru $C$ na $A$.*

W rozdziale poświęconym zagęszczeniom (rozdział 4) będziemy potrzebowali następującego

**Twierdzenie 2.7.10.** *(Kechris, Louveau, Woodin, Lemma 1 w [34], Lemma 4.2 w [1]) Jeśli $B$ jest zbiorem $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$–zupełnym ($n \geq 1$) to $\mathcal{K}(B)$ jest zbiorem $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n+1}$–zupełnym.*

To twierdzenie można uznać za uogólnienie wyżej wzmiankowanego wyniku Hurewicza (twierdzenie 2.7.7). Będziemy potrzebowali także

**Twierdzenie 2.7.11.** *(Hurewicz, Theorem 21.18 w [35]) Jeśli $A$ jest zbiorem analitycznym w przestrzeni polskiej $X$ oraz $A$ nie jest zbiorem $\sigma$–zwartym, to istnieje homeomorficzna kopia zbioru Cantora $C \subset X$ taka, że $C \cap A$, $C \cap (X \setminus A)$ są gęstymi podzbiorami $C$, z których pierwszy jest homeomorficzny z przestrzenią $\omega^\omega$, a drugi z przestrzenią $\mathbb{Q}$.*

oraz

**Lemat 2.7.12** (Wadge dla podzbiorów $\omega^\omega$, Theorem 21.14 w [35], ogólnie Kechris w [36]). *Załóżmy, że zachodzi Determinacja Rzutowa. Jeśli $A$ należy do klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ i nie należy do klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$, to każdy zbiór $C \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}(2^\omega)$ można zredukować do zbioru $A$.*

*Dowód.* Jeśli $A$ jest podzbiorem przestrzeni $\omega^\omega$, to można zastosować metodę z dowodu Theorem 21.14 ([35]). Jeśli $A$ jest podzbiorem pewnej przestrzeni polskiej $X$, $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ i $A \notin \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$, to możemy znaleźć podzbiór domknięty $F \subset \omega^\omega$ oraz ciągłą, różnowartościową surjekcję $f : F \to X$ ([35], Theorem 13.7). Niech $A' = f^{-1}[F]$. Wtedy $A'$ należy do klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ (jako ciągły przeciwobraz zbioru $A$) i z drugiej strony, $A'$ nie należy do klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$, gdyż funkcja $f$ jest borelowskim izomorfizmem i jeśliby $A' \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$ to także zbiór $A$ byłby elementem $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$.

Niech $C \in \utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}(2^\omega)$. Na mocy wspomnianego wyżej rozumowania Wadge istnieje ciągła redukcja $g$ zbioru $C$ do zbioru $A'$. Złożenie $g$ z funkcją $f$ redukuje zbiór $C$ do zbioru $A$. □

2.8. **Twierdzenia faktoryzacyjne.** Będą one służyły zredukowaniu problemów dotyczących przekształceń między ogólnymi przestrzeniami topologicznymi do problemów dotyczących przekształceń między przestrzeniami metrycznymi ośrodkowymi.

Przypomnijmy (por. paragraf 2.3), że jeśli $D$ jest podzbiorem przestrzeni całkowicie regularnej $X$ to funkcja $\pi_D$ jest rzutowaniem $\mathbb{R}^X$ na $\mathbb{R}^D$, a przestrzeń $C_D(X)$ jest obrazem przestrzeni $C_p(X)$ przy tym rzutowaniu.

**Twierdzenie 2.8.1.** *Jeśli $G = (G, +, 0)$ jest podgrupą iloczynu grup $\Pi_{i\in I} L_i$ oraz $h : G \to H$ jest ciągłym homomorfizmem w grupę metryczną ośrodkową, to istnieje przeliczalny zbiór indeksów $J \subset I$ oraz ciągły homomorfizm $g : \pi_J[G] \to H$ takie, że zachodzi równość $h = g \circ \pi_J|G$.*

*Dowód.* Niech $d$ będzie metryką na $H$. Wtedy dla każdego $n \in \omega$ istnieje otwarty zbiór bazowy $U_n \subset \Pi_{i\in I} L_i$ stanowiący otoczenie $0_{\Pi_{i\in I} L_i}$ taki, że zbiór $h(U_n \cap G)$ jest zawarty w kuli $K_d(0_H, \frac{1}{n+1})$. Bazowy zbiór otwarty $U_n$ zależy od skończenie wielu współrzędnych $J_n$. Niech $J = \bigcup J_n$.

Zauważmy, że jeśli $x \in G$, $x_i = 0_{L_i}$ $(i \in J)$ to $h(x) = 0$, gdyż dla każdego $n \in \omega$ jest $x \in U_n$ a więc $h(x) \in K_d(0_H, \frac{1}{n+1})$. To pozwala zdefiniować $g : \pi_J[G] \to H$ wzorem $g(x) = h(y)$, gdzie $y$ jest dowolnym elementem $\pi_J^{-1}(x)$. Z takiej definicji wynika równość $h = g \circ \pi_J|G$.

Pozostaje sprawdzić, że homomorfizm $g$ jest ciągły. Dla ustalonego $n \in \omega$ mamy wskazać $V \subset \pi_J[G]$ takie, że $g[V] \subset K_d(0_H, \frac{1}{n+1})$. Wiemy, że $h[U_n \cap G] \subset K_d(0_H, \frac{1}{n+1})$, a zatem $g[\pi_J[U_n] \cap \pi_J[G]] \subset K_d(0_H, \frac{1}{n+1})$, gdyż jeśli $y \in (\pi_J^{-1}[\pi_J[U_n] \cap \pi_J[G]]) \cap G$ to $y \in U_n$ (bowiem $J_n \subset J$), a więc $h(y) \in K_d(0_H, \frac{1}{n+1})$. Możemy więc określić $V = \pi_J[U_n] \cap \pi_J[G]$. To dowodzi ciągłości homomorfizmu $g$. $\square$

*Uwaga* 2.8.2. W rozprawie zdecydowaliśmy się na stosowanie w odniesieniu do grup notacji, w której działanie oznaczone jest przez $+$, a element neutralny przez $0 = 0_G$. Co więcej, przyjmujemy, że wszystkie rozważane przez nas grupy, o ile nie będzie powiedziane inaczej, są abelowe. Chcemy jednak podkreślić, że w powyższym rozumowaniu nie trzeba zakładać, że grupa $G$ jest przemienna.

**Twierdzenie 2.8.3** (Archangielski, [5], Theorem 6)**.** *Jeśli $X$ jest przestrzenią całkowicie regularną to dla każdej przestrzeni metrycznej ośrodkowej $Y$ i dla każdego ciągłego przekształcenia $f$ przestrzeni $C_p(X)$ w przestrzeń $Y$, istnieje przeliczalny zbiór $D \subset X$ oraz przekształcenie ciągłe $g : C_D(X) \to Y$ takie, że $g \circ (\pi_D | C_p(X)) = f$.*

2.9. **Liczby $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$, $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ i inne.** Zbiór $A \subset \omega^\omega$ jest *dominujący*, jeśli dla każdej funkcji $f \in \omega^\omega$ istnieje $g \in A$ taka, że dla wszystkich $n \in \omega$, poza być może skończenie wieloma, zachodzi nierówność $f(n) \leq g(n)$. Zbiór $A \subset \omega^\omega$ jest *wszędzie dominujący*, jeśli dla każdej funkcji $f \in \omega^\omega$ istnieje $g \in A$ taka, że dla wszystkich $n \in \omega$, zachodzi nierówność $f(n) \leq g(n)$. Definiujemy $\mathfrak{d}$ jako (zob. [18, Theorem 3.6])

$$\min\{|A| : A \text{ dominujący w } \omega^\omega\} =$$

$$\min\{|A| : A \text{ wszędzie dominujący w } \omega^\omega\}.$$

Zbiór $A \subset \omega^\omega$ jest *nieograniczony*, jeśli nie istnieje funkcja $g \in \omega^\omega$ taka, że dla każdej $f \in A$ i dla wszystkich $n \in \omega$, poza być może skończenie wieloma, zachodzi nierówność $f(n) \leq g(n)$. Można wykazać ([18, Theorem 9.1]), że zbiór $A \subset \omega^\omega$ jest nieograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest zawarty w żadnym zbiorze $\sigma$–zwartym. Definiujemy liczbę $\mathfrak{b}$ jako

$$\min\{|A| : A \text{ nieograniczony w } \omega^\omega\}.$$

Liczbę $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ definiujemy jako najmniejszą liczbę kardynalną $\kappa$, dla której istnieje rodzina podzbiorów $A_\alpha \subset \mathbb{R}$, $A_\alpha$ pierwszej kategorii ($\alpha < \kappa$) takich, że $\bigcup_{\alpha<\kappa} A_\alpha = \mathbb{R}$. W książce [9] można znaleźć więcej informacji na temat liczb $\mathfrak{d}$ i $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Liczba $\mathfrak{c}$ oznacza moc zbioru $2^\omega$. Liczby $\mathrm{add}(\mathcal{M})$ (zob. [9]), $\mathfrak{u}$ i $\mathfrak{g}_5$ (zob. [51]) pojawiają się w pracy, jednak nie będziemy potrzebowali ich definicji.

2.10. **Drzewa, zbiór ciągów skończonych.** Przez $\omega^{<\omega}$ oznaczamy zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach ze zbioru $\omega$, włączając w to ciąg pusty $\emptyset$. Dla dowolnego ciągu skończonego $t$, a w szczególności dla $t \in \omega^{<\omega}$, definiujemy $|t|$ jako długość ciągu $t$. Przez $\omega^n$ ($n \in \omega$) oznaczamy zbiór $\{t \in \omega^{<\omega} : |t| = n\}$. Dla danego ciągu $t \in \omega^n$ ($n \in \omega$), przez $[t]$ oznaczamy zbiór $\{x \in \omega^\omega : x|n = t\}$. Mówimy, że ciąg $s \in \omega^m$ lub ciąg $s \in \omega^\omega$ *przedłuża* ciąg $t \in \omega^n$ ($n \leq m$), jeśli dla każdego $0 \leq i < n$ zachodzi $t(i) = s(i)$; piszemy wtedy $t \subset s$.

*Drzewo* to podzbiór $T \subset \omega^{<\omega}$ taki, że jeśli $t \in T$ i $s \subset t$, to także $t \in T$. Dla zbioru $A \subset \omega^{<\omega}$ i $t \in A$ definiujemy $A_t = \{s \in A : t \subset s\}$.

Przez $[T]$ będziemy oznaczali *zbiór gałęzi drzewa* $T$, czyli zbiór tych wszystkich ciągów $z \in \omega^\omega$ takich, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $z|n \in T$.

2.11. **Filtry.** Rodzina podzbiorów zbioru liczba naturalnych $F \subset \mathcal{P}(\omega) = 2^\omega$ jest *filtrem*, jeśli dla każdych $A, B \in F$ i każdego $C \subset \omega$, $A \subset C$ zachodzi $A \cap B \in F$ oraz $C \in F$. Filtr $F \subset \mathcal{P}(\omega)$ jest *niegłówny*, jeśli należą do niego dopełnienia wszystkich zbiorów skończonych. Filtr $F$ jest *właściwy*, jeśli $\omega \notin F$. Będziemy rozważać wyłącznie filtry właściwe i niegłówne. Filtr $F$ jest *ultrafiltrem*, jeśli dla każdego $A \subset \omega$ zachodzi $A \in F$ albo $(\omega \setminus A) \in F$.

## 3. Przestrzenie N–stabilne i S–stabilne.

Za A.W. Archangielskim mówimy, że przestrzeń $X$ jest *N–stabilna*, jeśli przestrzeń $C_p(X)$ jest liniowo homeomorficzna z $C_p(X \times \omega)$. Przestrzeń $X$ jest *S–stabilna*, jeśli przestrzeń $C_p(X)$ jest liniowo homeomorficzna z $C_p(X \times S)$ (przestrzeń $S$ jest zdefiniowana w paragrafie 2.4).

W tym rozdziale podamy przykłady przestrzeni topologicznych które są N–stabilne, ale nie są S–stabilne; pytanie o istnienie takich przykładów sformułował A.W. Archangielski w [3] (Problem 4). Archangielski żądał w sformułowaniu problemu przykładów przestrzeni, które byłyby *l–stabilne*, ale nie S–stabilne; definicja przestrzeni l–stabilnej nie będzie nam potrzebna. Wystarczy nam, że z Proposition 29,3O ([3]) wynika, że każda przestrzeń N–stabilna jest l–stabilna. Ostatni podany przez nas przykład jest przestrzenią metryzowalną, co jest o tyle ważne, że autor pytania z pracy [3] rozpatruje pojęcia N–stabilności i l–stabilności głównie w kontekście przestrzeni metryzowalnych. Jest to motywowane między innymi tym, że właśnie dla przestrzeni metrycznych zachodzi twierdzenie Dugundji ([52], Theorem 6.6.2), stanowiące wyjście do użycia metody faktoryzacyjnej w klasie przestrzeni funkcji ciągłych. O zastosowaniach metody faktoryzacyjnej piszemy szerzej we wstępie. Przykład rozważany w paragrafie 3.4 znalazł wcześniej zastosowanie w pracy [58] przy dowodzie, że istnieje przestrzeń metryzowalna $X$ taka, że przestrzeń $C_p(X)$ nie jest liniowo homeomorficzna z przestrzenią $C_p(X \bigoplus X)$.

Jeśli dana jest przestrzeń $X$, to element $f \in C_p(X \times \omega)$ będziemy traktowali jako ciąg $f = (f_n)_{n\in\omega}$ złożony z funkcji $f_n \in C_p(X)$, $f_n(x) = f(x, n)$. Podobnie, element $f \in C_p(X \times \omega \times S)$ będziemy zapisywali jako $f = (f_{n,s})_{n\in\omega, s\in S}$, gdzie $f_{n,s} \in C_p(X)$, $f_{n,s}(x) = f(x, n, s)$.

3.1. **Pierwszy przykład.** Przykład będzie skonstruowany przy pomocy filtrów na zbiorze $\omega$. W paragrafie 2.11 zostały podane podstawowe definicje dotyczące filtrów.

Dla danego filtru $F \subset \mathcal{P}(\omega)$ definiujemy przestrzeń topologiczną $\omega_F$ jako zbiór punktów $\omega \cup \{\infty\}$ wraz z topologią dyskretną na punktach $\omega$ i rodziną otoczeń punktu $\infty$ w postaci $\{U : \exists A \in F\ U = A \cup \{\infty\}\}$. Wiadomy jest

**Fakt 3.1.1** ([19], twierdzenie 1.5.17)**.** *Przeliczalne przestrzenie regularne są normalne.*

Przy jego pomocy nietrudno wykazać

**Fakt 3.1.2.** *Dla każdego filtru $F$, przestrzeń $\omega_F$ jest przestrzenią normalną.*

*Dowód.* Łatwo możemy sprawdzić regularność przestrzeni $\omega_F$; następnie możemy skorzystać z faktu 3.1.1 $\square$

Przestrzeń $\omega_F$ jest metryzowalna, jeśli filtr $F$ składa się z dopełnień zbiorów skończonych (wtedy przestrzeń $\omega_F$ jest homeomorficzna z przestrzenią S).

**Fakt 3.1.3.** *Jeśli filtr $F$ jest ultrafiltrem niegłównym, to przestrzeń $\omega_F$ nie jest metryzowalna.*

*Dowód.* Punkt $\infty$ nie ma przeliczalnej bazy otoczeń w $\omega_F$. $\square$

**Twierdzenie 3.1.4** (Lutzer, McCoy, [43])**.** *Jeśli $F$ jest ultrafiltrem, to przestrzeń $C_p(\omega_F)$ jest przestrzenią Baire'a.*

Bierzemy za $X = \omega_F \times \omega$, gdzie $F$ jest ultrafiltrem na $\omega$. Wtedy $X$ i $X \times \omega$ są homeomorficzne. Na mocy twierdzeń 3.1.4, 2.4.1, przestrzeń $C_p(X) = C_p(\omega_F \times \omega) = C_p(\omega_F)^\omega$ jest przestrzenią Baire'a. Z drugiej strony, na mocy faktu 2.4.2, przestrzeń $C_p(X \times S)$ nie jest przestrzenią Baire'a, a więc nie ma homeomorfizmu między $C_p(X)$ i $C_p(X \times S)$. Zatem $X$ jest przykładem przestrzeni N–stabilnej, która nie jest S–stabilna.

3.2. **Drugi przykład.** W tym paragrafie rozpatrujemy przestrzeń $\omega_1$ z topologią dyskretną. Przestrzeń $L(\aleph_1) = \omega_1 \cup \{\infty\}$ składa się ze zbioru $D = \omega_1$ złożonego z $\omega_1$ punktów izolowanych oraz punktu $\infty$, którego bazę otoczeń stanowi rodzina

$$\{\{\infty\} \cup A \subset D \cup \{\infty\} : D \setminus A \text{ jest zbiorem przeliczalnym}\}.$$

Zauważmy, że każda funkcja rzeczywista, ciągła $f : L(\aleph_1) \to \mathbb{R}$ jest stała, równa $f(\infty)$ dla wszystkich $d \in D$, po pominięciu co najwyżej przeliczalnie wielu. Definiujemy $\Sigma(\aleph_1)$ jako podprzestrzeń $C_p(L(\aleph_1))$, złożoną z tych funkcji, które w nieskończoności są równe 0. Dla $f \in \Sigma(\aleph_1)$ definiujemy $\kappa(f) = \sup\{\gamma \in \omega_1 : f(\gamma) \neq 0\}$. Niech $f \in C_p(L(\aleph_1))$; zadajemy $T : C_p(L(\aleph_1)) \to \Sigma(\aleph_1)$ za pomocą wzorów

$$T(f)(0) = f(\infty)$$

$$T(f)(\alpha + 1) = f(\alpha) - f(\infty) \text{ dla } \alpha < \omega$$

$$T(f)(\alpha) = f(\alpha) - f(\infty) \text{ dla } \omega \leq \alpha < \omega_1$$

Przekształcenie $T$ jest homeomorfizmem liniowym pomiędzy $C_p(L(\aleph_1))$ i $\Sigma(\aleph_1)$.

Niech $D_n \subset D$ $(n \in \omega)$ będą takimi podzbiorami $D$, że $D_n \cap D_m = \emptyset$ dla $m \neq n$, $m, n \in \omega$ oraz $\bigcup_{n\in\omega} D_n = D$. Niech $b_n : D_n \to D$ będzie dowolną bijekcją $(n \in \omega)$.

Przestrzeń $\Sigma(\aleph_1)$ jest liniowo homeomorficzna z przestrzenią $\Sigma(\aleph_1)^\omega$, gdyż ciągowi $(f_n)_{n\in\omega} \in \Sigma(\aleph_1)^\omega$ możemy przypisać $f \in \Sigma(\aleph_1)$,

$$f(d) = f_n(b_n(d)) \text{ dla } d \in D_n.$$

Posługując się argumentacją zasugerowaną przez Romana Pola i przedstawioną w pracy magisterskiej [48] (rozdział 8), uzyskujemy

**Fakt 3.2.1.** *Przestrzeń $\Sigma(\aleph_1)$ jest przestrzenią dziedzicznie Baire'a.*

Dostajemy w ten sposób drugi przykład przestrzeni, która jest N–stabilna, ale nie jest S–stabilna. Faktycznie, jeśli $X = L(\aleph_1) \times \omega$, to $C_p(X \times \omega)$ i $C_p(X)$ są liniowo homeomorficzne, a ponadto przestrzeń $C_p(X)$ jest liniowo homeomorficzna z $\Sigma(\aleph_1)$, a więc zgodnie z faktem 3.2.1, przestrzeń $\Sigma(\aleph_1)$ jest dziedzicznie Baire'a; z drugiej strony $C_p(X \times S)$, zgodnie z faktem 2.4.2, nie jest przestrzenią Baire'a, więc nie istnieje homeomorfizm między przestrzeniami $C_p(X)$ i $C_p(X \times S)$.

3.3. **Trzeci przykład.** W tym paragrafie rozpatrujemy $\omega_1$ z topologią porządkową (por. paragraf 2.5). Niech $X = \omega_1 \times \omega$. Oczywiście, przestrzeń $C_p(X \times \omega)$ jest liniowo homeomorficzna z $C_p(X)$, gdyż $X$ i $X \times \omega$ są homeomorficzne. By otrzymać trzeci przykład przestrzeni N–stabilnej, ale nie S–stabilnej, pozostaje wykazać, że $C_p(X)$ i $C_p(X \times S)$ nie są homeomorficzne. Nasze rozumowanie będzie bardzo zbliżone do rozumowania Gulko ([25]). Definiujemy

$$E_\alpha = \{(f_n)_{n\in\omega} \in C_p(X) : \forall_{n\in\omega} \text{ funkcja } f_n \text{ jest stała poczynając od } \alpha\}$$

i podobnie

$$F_\alpha = \{(f_{n,m})_{n\in\omega, s\in S} \in C_p(X \times S) : \forall_{n\in\omega, m\in S} \text{ funkcja } f_{n,m} \text{ jest stała poczynając od } \alpha\}.$$

Zauważmy, że zgodnie z Faktem 2.5.3 zachodzą równości $C_p(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} E_\alpha$, $C_p(X \times S) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$. Przypuśćmy, że istnieje liniowy homeomorfizm $T : C_p(X) \to C_p(X \times S)$.

**Lemat 3.3.1** (Gulko). *Zbiór $C = \{\alpha : T(E_\alpha) = F_\alpha\}$ jest domknięty i nieograniczony w $\omega_1$.*

*Dowód.* Faktycznie, jeśli $\alpha_0 < \omega_1$, to $T(E_{\alpha_0})$ jest ośrodkową podprzestrzenią $C_p(X \times S)$, a więc $T(E_{\alpha_0}) \subset F_{\beta_0}$ dla pewnej liczby $\beta_0$. Podobnie, zbiór $T^{-1}(F_{\beta_0})$ jest zawarty w przestrzeni $E_{\alpha_1}$, dla pewnego $\alpha_1 < \omega_1$; przez indukcję definiujemy $\alpha_n, \beta_n < \omega_1$ takie, że $\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ oraz, $T(E_{\alpha_n}) \subset F_{\beta_n}$, $T^{-1}(F_{\beta_n}) \subset E_{\alpha_{n+1}}$ $(n \in \omega)$.

Definiujemy $\gamma = \sup_{n\in\omega} \alpha_n = \sup_{n\in\omega} \beta_n$. Wtedy

$$T(\bigcup_{\alpha<\gamma} E_\alpha) \subset F_\gamma$$

oraz

$$T^{-1}(\bigcup_{\alpha<\gamma} F_\alpha) \subset E_\gamma.$$

W związku z tym, że $\bigcup_{\alpha<\gamma} E_\alpha$ jest gęstą podprzestrzenią $E_\gamma$ oraz $\bigcup_{\alpha<\gamma} F_\alpha$ jest gęstą podprzestrzenią $F_\gamma$, to z ciągłości $T$, $T^{-1}$ i domkniętości zbiorów $E_\gamma$, $F_\gamma$ dostajemy $T(E_\gamma) = F_\gamma$, oraz $T^{-1}(F_\gamma) = E_\gamma$.

Jeśli $\alpha_n \in C$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ $(n \in \omega)$, $\gamma = \sup_{n\in\omega} \alpha_n \in C$, to skoro $\bigcup_{n\in\omega} E_{\alpha_n}$ jest gęstą podprzestrzenią $E_\gamma$, $\bigcup_{n\in\omega} F_{\alpha_n}$ jest gęstą podprzestrzenią $F_\gamma$ oraz $T$, $T^{-1}$ są odwzorowaniami ciągłymi, to $T(E_\gamma) = F_\gamma$, $T^{-1}(F_\gamma) = E_\gamma$. □

**Lemat 3.3.2** (Gulko)**.** *Zbiór*

$$\begin{aligned} D = \{\alpha < \omega_1 : \ & \forall (f_k)_{k\in\omega}, (g_k)_{k\in\omega} \in C_p(X)\ [\forall_{\beta<\alpha, n\in\omega}\ f_n(\beta) = g_n(\beta)] \ \Leftrightarrow \\ & [\forall_{\beta<\alpha, n\in\omega, s\in S}\ T((f_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s) = T((g_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s)]\} \end{aligned}$$

*jest domknięty i nieograniczony w* $\omega_1$.

*Dowód.* Dla liczby $\alpha < \omega_1$ definiujemy $S^\alpha : C_p(X) \to C_p(\alpha\times\omega\times S)$, $S^\alpha(f) = T(f)|\alpha\times\omega\times S$. Podobnie definiujemy $R^\alpha : C_p(X \times S) \to C_p(\alpha \times \omega)$, $R^\alpha(f) = T^{-1}(f)|\alpha \times \omega$.

Niech $\alpha_0$ będzie ustaloną liczbą mniejszą niż $\omega_1$. Zgodnie z twierdzeniem faktoryzacyjnym (twierdzenie 2.8.3) zastosowanym do funkcji $S^{\alpha_0}$, istnieje liczba $\beta_0 > \alpha_0$ taka, że $\forall (f_k)_{k\in\omega}, (g_k)_{k\in\omega} \in C_p(X)$

$$[\forall_{\beta<\beta_0, n\in\omega}\ f_n(\beta) = g_n(\beta)] \Rightarrow [\forall_{\beta<\alpha_0, n\in\omega, s\in S}\ T((f_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s) = T((g_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s)].$$

Zgodnie z twierdzeniem 2.8.3, zastosowanym do funkcji $R^{\beta_0}$, możemy wybrać liczbę $\alpha_1 > \beta_0$ taką, że $\forall (f_k)_{k\in\omega}, (g_k)_{k\in\omega} \in C_p(X)$

$$[\forall_{\beta<\alpha_1, n\in\omega, s\in S}\ T((f_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s) = T((g_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s)] \Rightarrow [\forall_{\beta<\beta_0, n\in\omega}\ f_n(\beta) = g_n(\beta)].$$

Twierdzenie 2.8.3 pozwala nam wybrać liczby $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots < \omega_1$ takie, że $\forall (f_k)_{k\in\omega}, (g_k)_{k\in\omega} \in C_p(X)$

$$[\forall_{\beta<\beta_n, n\in\omega}\ f_n(\beta) = g_n(\beta)] \Rightarrow [\forall_{\beta<\alpha_{n-1}, n\in\omega, s\in S}\ T((f_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s) = T((g_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s)],$$

oraz

$$[\forall_{\beta<\alpha_n, n\in\omega, s\in S}\ T((f_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s) = T((g_k)_{k\in\omega})(\beta, n, s)] \Rightarrow [\forall_{\beta<\beta_{n-1}, n\in\omega}\ f_n(\beta) = g_n(\beta)].$$

Liczba $\sup_{n\in\omega}\alpha_n = \sup_{n\in\omega}\beta_n$ jest większa niż $\alpha_0$ i należy do zbioru $D$. To dowodzi, że $D$ jest zbiorem nieograniczonym. Łatwo sprawdzić, że zbiór $D$ jest domknięty. □

Definiujemy $E(\alpha, \beta)$ jako zbiór funkcji z $C_p(X)$, które zerują się dla wszystkich $(\gamma, n) \in \alpha \times \omega$ i są stałe dla wszystkich $(\gamma, n)$, $\gamma \geq \beta$, $n \in \omega$. Analogicznie, definiujemy $F(\alpha, \beta)$ jako zbiór funkcji z $C_p(X \times S)$, które zerują się dla wszystkich $(\gamma, n, s) \in \alpha \times \omega \times S$ i są stałe dla wszystkich $(\gamma, n, s)$ takich, że $\gamma \geq \beta$, $n \in \omega$, $s \in S$.

Bierzemy $\alpha \in D \cap \mathrm{Lim}$ oraz $\beta \in C \cap \mathrm{Lim}$, $\beta > \alpha$, gdzie Lim jest zbiorem wszystkich liczb granicznych, mniejszych niż $\omega_1$. Zgodnie z lematami 3.3.1, 3.3.2, zachodzi $T(E(\alpha, \beta)) = F(\alpha, \beta)$. Niech

$$G_\beta = \{(f_n)_{n\in\omega} \in E(\alpha, \beta) : \forall_{n\in\omega}\ f_n(\beta) = 0\}$$

oraz

$$H_\beta = \{(g_{n,s})_{n\in\omega, S\in S} \in F(\alpha, \beta) : \forall_{n\in\omega, s\in S}\ g_{n,s}(\beta) = 0\}.$$

Definiujemy

$$G'_\beta = \{(f_n)_{n\in\omega} \in E(\alpha, \beta) : \forall_{n\in\omega}\ f_n \text{ stała na odcinku } (\alpha; \beta]\},$$

$$H'_\beta = \{(g_{n,s})_{n\in\omega} \in F(\alpha, \beta) : \forall_{n\in\omega, s\in S}\ g_{n,s} \text{ stała na odcinku } (\alpha; \beta]\}.$$

Każdą funkcję $f \in E(\alpha, \beta)$ możemy jednoznacznie zapisać jako $f_0 + f_1$, gdzie $f_0 \in G_\beta$, $f_1 \in G'_\beta$ i podobnie każdą funkcję $g \in F(\alpha, \beta)$ można zapisać jednoznacznie jako $g_0 + g_1$, gdzie $g_0 \in H_\beta$, $g_1 \in H'_\beta$.

Przypuśćmy, że $T(G_\beta) = H_\beta$. Wtedy mamy $T(f) = T(f_0 + f_1) = T(f_0) + T(f_1)$ oraz $T^{-1}(g_0 + g_1) = T^{-1}(g_0) + T^{-1}(g_1)$, gdzie $f = f_0 + f_1$ oraz $g = g_0 + g_1$ to wyżej opisane rozkłady. Niech $\pi_F$, $\pi_G$ będą rzutami z odpowiednio, przestrzeni $E(\alpha, \beta)$ na $G'_\beta$ oraz z przestrzeni $F(\alpha, \beta)$ na $H'_\beta$. Definiujemy $T_1 : G'_\beta \to H'_\beta$, $T_1(f) = \pi_G(T(\pi_F^{-1}(f)))$; jeśli $(g - h) \in G_\beta$ to $T(g) - T(h) \in H_\beta$, a więc $T_1$ jest dobrze zdefiniowany; podobnie definiujemy

$T_1^{-1}$. $T_1$ jest liniowym homeomorfizmem $G'_\beta$ na $H'_\beta$; to przywodzi nas do sprzeczności, gdyż przestrzeń $G'_\beta$ jest liniowo homeomorficzna z $\mathbb{R}^\omega$, przestrzeń $H'_\beta$ jest liniowo homeomorficzna z $\mathbb{R}^\omega \times C_p(S)$ z których pierwsza jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny, a druga, zgodnie z faktem 2.4.2, nie jest przestrzenią Baire'a.

Uzyskujemy więc wniosek, że albo $T(G_\beta) \not\subset H_\beta$, albo $T^{-1}(H_\beta) \not\subset G_\beta$. Jeśli $T(G_\beta) \not\subset H_\beta$ to bierzemy funkcję $f^\beta = (f_n^\beta)_{n\in\omega} \in G_\beta$ dla której $T(f^\beta)$ nie należy do $H_\beta$. Jeśli $T^{-1}(H_\beta) \not\subset G_\beta$, to bierzemy funkcję $g^\beta = (g_{n,s}^\beta)_{n\in\omega, s\in S} \in H_\beta$ dla której $T^{-1}(g^\beta)$ nie należy do $G_\beta$.

Oznaczamy $\alpha_0 = \alpha$, $\beta_0 = \beta$ i powtarzamy powyższą procedurę dla pary $\alpha_1 \in D$, $\beta_1 \in C$, $\alpha_0 < \beta_0 < \alpha_1 < \beta_1$. Przez indukcję, ze względu na $\gamma < \omega_1$, budujemy ciąg liczb i funkcji, które zaświadczają o tym, że $T(G_{\beta_\gamma}) \neq H_{\beta_\gamma}$. Przypuśćmy najpierw, że dla nieprzeliczalnie wielu kroków zaszła możliwość $T(G_{\beta_\gamma}) \not\subset H_{\beta_\gamma}$ czyli, że dla nieprzeliczalnie wielu $\gamma < \omega_1$ udało nam się wybrać funkcje $f^{\beta_\gamma} = (f_k^{\beta_\gamma})_{k\in\omega} \in G_{\beta_\gamma}$ takie, że $T(f^{\beta_\gamma}) \notin H_{\beta_\gamma}$. Możemy znaleźć $n_0 \in \omega$, $s_0 \in S$ oraz $\epsilon > 0$ takie, że dla nieprzeliczalnie wielu $\gamma < \omega_1$ mamy $|T(f^{\beta_\gamma})(\beta_\gamma, n_0, s_0)| \geq \epsilon$. Niech $\gamma_{n+1} > \gamma_n$ będzie rosnącym ciągiem takich $\gamma$ i niech $\delta = \sup_{n\in\omega} \gamma_n$. Wtedy dla każdego $(\gamma, k) \in \omega_1 \times \omega$ zachodzi $f^{\beta_{\gamma_n}}(\gamma, k) \to 0$ przy $n \to \infty$, a jednocześnie $|T(f^{\beta_{\gamma_n}})(\delta, n_0, s_0)| \geq \epsilon$, co daje sprzeczność z przypuszczeniem, że $T$ jest ciągłym przekształceniem takim, że $T(0) = 0$.

Rozumujemy analogicznie, jeśli dla nieprzeliczalnie wielu kroków zaszła możliwość $T^{-1}(H_{\beta_\gamma}) \not\subset G_{\beta_\gamma}$. To dowodzi, że nie istnieje liniowy homeomorfizm pomiędzy $C_p(X \times S)$ i $C_p(X)$.

*Uwaga* 3.3.3. Inaczej, niż w oryginalnym przykładzie Gulki ([25]), gdzie dowodzi się, że nie istnieje homeomorfizm między przestrzeniami $C_p(\omega_1)$ i $C_p(\omega_1 \bigoplus \omega_1)$, nie możemy w naszym rozumowaniu posłużyć się argumentem, że nie istnieje homeomorfizm między przestrzeniami $E(\alpha, \beta)$ i $F(\alpha, \beta)$, który przeprowadza $G_\beta$ na $H_\beta$ ($\alpha, \beta < \omega_1$, przedział $(\alpha, \beta)$ nieskończony). Choć przestrzenie $G'_\beta$, $H'_\beta$, dopełniające $G_\beta$ i $H_\beta$ do przestrzeni $E(\alpha, \beta)$ i $F(\alpha, \beta)$, nie są homeomorficzne, to dzięki [52, Theorem 6.12.15] istnieje homeomorfizm między $G_\beta$ i $H_\beta$, który rozszerza się do homeomorfizmu między $E(\alpha, \beta)$ i $F(\alpha, \beta)$ ([10, Theorem 3.2]).

3.4. **Przykład metryzowalnej przestrzeni N–stabilnej, ale nie S–stabilnej.** Odwzorowanie $x \to P(x)$, które z punktem $x \in X$ wiąże podzbiór przestrzeni $Y$, nazywamy *półciągłym dolnie*, jeśli dla każdego zbioru otwartego $U \subset Y$, zbiór $\{x \in X : P(x) \cap U \neq \emptyset\}$ jest otwarty.

Jeśli $T : C_p(X) \to C_p(Y)$ jest liniowym odwzorowaniem na przestrzeń $C_p(Y)$, to z każdym $y \in Y$ możemy związać kanonicznie ([52, Rozdział 6.8]) skończony zbiór $\mathrm{supp}(y) \subset X$ oraz liczby $\{a_x\}_{x \in \mathrm{supp}(y)}$ takie, że dla każdej funkcji $f \in C_p(X)$ zachodzi

$$T(f)(y) = \sum_{x \in \mathrm{supp}(y)} a_x f(x).$$

Zbiór $\mathrm{supp}(y)$ nazywamy *nośnikiem punktu $y$*. Zauważmy, że jest to inny pojęcie nośnika, niż to, które będziemy używać w rozdziale 6 i w paragrafie 7.2. Dla podzbioru $A \subset Y$ przez $\mathrm{supp}(A)$ oznaczamy sumę nośników punktów z $A$.

Odwzorowanie $y \to \mathrm{supp}(y)$ ma następujące własności (do których będziemy dalej odwoływali się, jako do własności nośników):

(1) ([52, Lemma 6.8.2(2)]) jest półciągłe dolnie, a w szczególności dla każdego $A \subset Y$ i $y \in \mathrm{cl}_Y(A)$ zachodzi

$$\mathrm{supp}(y) \subset \mathrm{cl}_X(\mathrm{supp}(A)),$$

(2) ([52, Theorem 6.8.3]) jeśli $S \subset Y$ jest zbiorem zwartym, to

$$\mathrm{cl}_X(\mathrm{supp}(S)) \text{ jest zwartym podzbiorem X.}$$

(3) ([52, Lemma 6.8.2(5)]) jeśli $T$ jest liniowym homeomorfizmem oraz $x \to \mathrm{supp}(x)$ jest nośnikiem przekształcenia odwrotnego $T^{-1}$, to dla każdego $y \in Y$ zachodzi $y \in \mathrm{supp}(\mathrm{supp}(y))$.

Dla każdej liczby granicznej $\alpha < \omega_1$ ustalamy ciąg $(x_n^\alpha)_{n \in \omega}$ taki, że $x_n^\alpha < \alpha$ oraz $\sup_{n \in \omega} x_n^\alpha = \alpha$. *Przestrzenią Stone'a* będziemy nazywali zbiór

$$E = \{(x_n^\alpha)_{n \in \omega} : \alpha < \omega_1,\ \alpha \text{ graniczna}\} \subset \omega_1^\omega$$

wraz z metryką $d(x, y) = \frac{1}{n+1}$ gdzie $n \in \omega$ najmniejsza liczba naturalna, dla której $x(n) \neq y(n)$ $(x \neq y)$ .

Niech $X$ będzie przestrzenią metryzowalną ciężaru $\omega_1$. Wstępujący ciąg

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_\xi \ldots \subset X,\ \xi < \omega_1$$

nazywamy *dopuszczalnym*, jeśli $|A_\xi| \leq \omega$ oraz

$$\mathrm{cl}(\bigcup\{A_\xi : \xi < \omega_1\}) = X,\ \text{ i } A_\xi = \bigcup\{A_\alpha : \alpha < \xi\}$$

dla granicznych $\xi$.

Dla granicznych liczb $\xi < \omega_1$ definiujemy *warstwę na poziomie $\xi$ względem ciągu dopuszczalnego* jako

$$\widehat{A_\xi} = \mathrm{cl}(A_\xi) \setminus \bigcup \{\mathrm{cl}(A_\alpha) : \alpha < \xi\}$$

Zachodzi

**Twierdzenie 3.4.1** (R. Pol, Corollary 2.3 [57])**.** *Dla każdych dwóch ciągów dopuszczalnych w przestrzeni metryzowalnej $X$ ciężaru $\omega_1$, warstwy określone przez te ciągi są równe na wszystkich poziomach, po pominięciu niestacjonarnie wielu.*

Dla przestrzeni Stone'a $E$ ustalamy ciąg dopuszczalny

$$E_\xi = \{(x_n^\alpha)_{n\in\omega} : \alpha < \xi, \alpha \text{ graniczna}\}.$$

Powtarzając rozumowanie Stone'a ([69],Rozdział 5) wykażemy, że wszystkie warstwy względem tego ciągu, za wyłączeniem niestacjonarnie wielu, są jednopunktowe.

Zauważmy najpierw, że jeśli $\alpha < \xi$, to $(x_n^\xi) \notin \mathrm{cl}(E_\alpha)$, gdyż dla pewnego $n_0 \in \omega$ mamy $x_n^\xi > \alpha$ dla wszystkich $n \in \omega, n \geq n_0$ (a więc odległość od punktu $(x_n^\xi)_{n\in\omega}$ do zbioru $E_\alpha$ wynosi co najmniej $\frac{1}{n_0+1}$).

Zatem dla każdego granicznego $\xi < \omega_1$ warstwa $\widehat{E_\xi}$ jest pusta lub składa się z punktu $\{(x_n^\xi)\}_{n\in\omega}$. Przypuśćmy, że dla wszystkich $\xi$ z pewnego zbioru domkniętego i nieograniczonego $C \subset \omega_1$ warstwy $\widehat{E_\xi}$ są puste. Z każdą liczbą $\xi \in C$ możemy związać liczbę naturalną $n_\xi \in \omega$, dla której kula o promieniu $\frac{1}{n_\xi}$ będzie miała puste przecięcie ze zbiorem $E_\xi$. Z definicji metryki $d$ dostajemy, że dla każdego $\alpha < \xi$ istnieje $n < n_\xi$ takie, że $x_n^\alpha \neq x_n^\xi$.

Definiujemy $C_n = \{\xi \in C : n_\xi = n\}$. Zgodnie z faktem 2.5.2, istnieje $n_0 \in \omega$ takie, że zbiór $C_{n_0}$ jest stacjonarny. Definiujemy $A_0 = C_{n_0}$ oraz $f_k : C \to \omega_1$, wzorem $f_k(\xi) = x_k^\xi$ $(k \in \omega)$. Funkcja $f_0$ jest regresywna i zgodnie z lematem 2.5.1, istnieje stacjonarny zbiór $A_1 \subset A_0$ taki, że $f_0$ jest stała na $A_1$. Indukcyjnie, dla $k \leq n_0$, definiujemy $A_{k+1} \subset A_k$ takie, że $f_k$ jest stałe na $A_{k+1}$.

Niech $\alpha, \xi \in A_{n_0}$, $\alpha < \xi$. Funkcje $f_k$ $(0 \leq k < n_0)$ są stałe na zbiorze $A_{n_0}$, a więc

$$x_k^\xi = f_k(\xi) = f_k(\alpha) = x_k^\alpha$$

dla każdego $0 \leq k < n_0$. Skoro $n_\xi = n_0$, to dostajemy sprzeczność z przypuszczeniem, że odległość od $(x_n^\xi)_{n\in\omega}$ do $E_\xi$ wynosi co najmniej $\frac{1}{n_\xi}$. To dowodzi, że dla wszystkich $\xi$ granicznych, za pominięciem niestacjonarnie wielu, warstwa $\widehat{E_\xi}$ jest równa $\{(x_n^\xi)_{n\in\omega}\}$.

*Uwaga* 3.4.2. Rozumowanie Stone'a wraz z twierdzeniem 3.4.1 przekonuje, że dla każdego ciągu dopuszczalnego w przestrzeni $E$, wszystkie warstwy wyznaczone przez ten ciąg, za pominięciem niestacjonarnie wielu, są jednopunktowe. Wobec tego wnioskujemy z twierdzenia 3.4.1, że dla każdego ciągu dopuszczalnego w przestrzeniach $E \times \omega$, $E \times \omega \times S$, wszystkie warstwy, po pominięciem niestacjonarnie wielu, są postaci $\{(x_n^\xi)_{n\in\omega}\} \times \omega$ i odpowiednio, $\{(x_n^\xi)_{n\in\omega}\} \times \omega \times S$.

Wykorzystamy tą uwagę przy dowodzie następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 3.4.3.** *Nie istnieje liniowy homeomorfizm między przestrzeniami $C_p(E \times \omega)$ i $C_p(E \times \omega \times S)$.*

Przed dowodem zauważmy, że przestrzeń $X = E \times \omega$ jest przykładem przestrzeni metrycznej takiej, że $C_p(X)$ i $C_p(X \times \omega)$ są liniowo homeomorficzne (gdyż $X$ i $X \times \omega$ są homeomorficzne), natomiast, w świetle twierdzenia 3.4.3, przestrzenie $C_p(X \times S)$ i $C_p(X)$ nie są liniowo homeomorficzne.

*Dowód.* Przypuśćmy, że istnieje liniowy homeomorfizm $T : C_p(X) \to C_p(Y)$, gdzie $X = E \times \omega$ oraz $Y = X \times S$. Niech

Niech

$$A_1^0 \subset A_2^0 \subset \ldots \subset A_\xi^0 \ldots \subset X \ (\xi < \omega_1),$$

będzie dowolnym ciągiem dopuszczalnym w przestrzeni $X$.
Dla $n \in \omega$ definiujemy przez indukcję zbiory

$$B_\xi^n = \bigcup \{\mathrm{supp}(x) : x \in A_\xi^n\}$$

gdzie $\mathrm{supp}(x)$ jest nośnikiem punktu $x$ względem przekształcenia $T^{-1}$ i

$$A_\xi^{n+1} = \bigcup \{\mathrm{supp}(y) : y \in B_\xi^n\},$$

gdzie $\mathrm{supp}(y)$ jest nośnikiem punktu $y$ względem przekształcenia $T$. Ostatecznie, dla każdego $\xi < \omega_1$ kładziemy

$$C_\xi = \bigcup_{n\in\omega} A_\xi^n$$

oraz

$$D_\xi = \bigcup_{n\in\omega} B_\xi^n$$

Wtedy ciąg

$$C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_\xi \subset \ldots \subset X,\ \xi < \omega_1,$$

i ciąg

$$D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_\xi \subset \ldots \subset Y,\ \xi < \omega_1,$$

są dopuszczalne i dodatkowo spełniają warunki $C_\xi = \mathrm{supp}(D_\xi)$ i $D_\xi = \mathrm{supp}(C_\xi)$ dla każdego $\xi < \omega_1$. Wyjaśnimy, dlaczego suma $\bigcup_{\xi<\omega_1} D_\xi$ jest gęsta w $Y$. Niech $y \in Y$ będzie dowolnym punktem. Zgodnie z własnością 3 nośników istnieje $x \in \mathrm{supp}(y)$ taki, że $y \in \mathrm{supp}(x)$. Wiemy także, że ciąg $\{C_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ jest dopuszczalny, a w szczególności $x \in \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi)$. Zgodnie z własnością 1 nośników mamy $\mathrm{supp}(x) \subset \mathrm{cl}_Y(\mathrm{supp} \bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi)$. Z równości $\mathrm{supp}(\bigcup_{\xi<\omega_1} C_\xi) = \bigcup_{\xi<\omega_1} D_\xi$, wnioskujemy, że $y \in \mathrm{supp}(x) \subset \mathrm{cl}_Y(\bigcup_{\xi<\omega_1} D_\xi)$. To dowodzi, że zbiór $\bigcup_{\xi<\omega_1} D_\xi$ jest gęsty w $Y$.

Zgodnie z uwagą 3.4.2, istnieje $\xi < \omega_1$ takie, że $\widehat{C}_\xi = \{(x_n^\xi)_{n\in\omega}\} \times \omega$ oraz $\widehat{D}_\xi = \{(x_n^\xi)_{n\in\omega}\} \times \omega \times S$. Ustalamy $S'$, kopię $S$ w $\widehat{D}_\xi$. Zgodnie z własnością nośników 2 wiemy, że $R = \mathrm{cl}_X(\mathrm{supp}(S'))$ jest zwartym podzbiorem $X$. Własność 1 nośników razem z faktem, że $\mathrm{supp}(D_\xi) = C_\xi$ implikuje, że zbiór $R$ jest podprzestrzenią $\mathrm{cl}_X(C_\xi)$. Cześć wspólna $R$ i $\widehat{C}_\xi$ jest skończona, gdyż zbiór $\widehat{C}_\xi$ jest dyskretny i domknięty, a $R$ jest przestrzenią zwartą. To dowodzi, że możemy znaleźć $y \in S' \setminus \mathrm{supp}(R \cap \widehat{C}_\xi)$.

Będziemy dążyli do sprzeczności z faktem, że $y \in \bigcup\{\mathrm{supp}(x) : x \in \mathrm{supp}(y)\}$ (jest to własność (3) nośników). Zbiór $\mathrm{supp}(y)$ zapisujemy jako sumę $\mathrm{supp}(y) = X_1 \cup X_2$, gdzie $X_1 = \mathrm{supp}(y) \cap \widehat{C_\xi}$ oraz $X_2 = \mathrm{supp}(y) \setminus X_1 \subset \bigcup_{\alpha<\xi} \mathrm{cl}_X(C_\alpha)$; istnieje $\alpha < \xi$ takie, że $X_2 \subset \mathrm{cl}_X(C_\alpha)$.

Zgodnie z wyborem $y$, mamy $y \notin \mathrm{supp}(X_1)$. Z drugiej strony, dzięki własności 1 nośników i równości $\mathrm{supp}(C_\alpha) = D_\alpha$, mamy

$$\mathrm{supp}(X_2) \subset \mathrm{supp}(\mathrm{cl}_X(C_\alpha)) \subset \mathrm{cl}_Y(D_\alpha),$$

W szczególności $\operatorname{supp}(X_2) \cap \widehat{D_\xi} = \emptyset$. Doszliśmy więc do wniosku, że $y \notin \operatorname{supp}(X_1) \cup \operatorname{supp}(X_2) = \bigcup\{\operatorname{supp}(x) : x \in \operatorname{supp}(y)\}$, co daje sprzeczność z własnością 3 nośników. $\square$

## 4. Zagęszczenia przestrzeni $C_p(X)$ na przestrzenie zwarte.

4.1. **Wprowadzenie.** Odwzorowanie $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznych $X$ i $Y$ nazywamy *zagęszczeniem*, jeśli $f$ jest ciągłą bijekcją. Zauważmy, że istnienie zagęszczenia $f : X \to Y$ na pewną przestrzeń zwartą $Y$, jest równoważne istnieniu słabszej zwartej topologii na $X$. Zachodzi ogólnie znany

**Fakt 4.1.1.** *Jeśli $X$ jest przestrzenią lokalnie zwartą, to istnieje zagęszczenie $X$ na przestrzeń zwartą.*

*Dowód.* Możemy przypuszczać, że $X$ jest przestrzenią nieskończoną; ustalamy punkt $x \in X$. Bierzemy $\omega(X)$, jednopunktowe uzwarcenie przestrzeni $X$, powstałe przez dodanie punktu $\infty$. Niech $i : X \to \omega(X)$ będzie włożeniem homeomorficznym $X$ w uzwarcenie $\omega(X)$. Definiujemy $Y$ jako przestrzeń powstałą z $\omega(X)$ przez sklejenie punktów $\infty$ i $x$. Przez $q : \omega(X) \to Y$ oznaczamy przekształcenie ilorazowe. Definiujemy zagęszczenie $X$ na $Y$ jako złożenie $q \circ i$. □

Z drugiej strony, przestrzeni liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nie można zagęścić na przestrzeń zwartą. Jeśli $A$ jest podzbiorem analitycznym, nieborelowskim pewnej przestrzeni polskiej $X$, to $A$ nie można zagęścić do przestrzeni zwartej, metrycznej $K$; faktycznie, każde takie zagęszczenie, na mocy twierdzenia 2.7.3, zadawałoby izomorfizm borelowski pomiędzy $A$ i przestrzenią zwartą $K$. Wtedy zbiór $A$ byłby różnowartościowym borelowskim obrazem przestrzeni $K$, a więc $A$ byłby zbiorem borelowskim w $X$ (twierdzenie 2.7.2), wbrew naszemu przypuszczeniu o $A$.

W tym rozdziale symbol $\Gamma$ będzie oznaczał jedną z klas rzutowych $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ lub $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ $(n \geq 1)$. Podamy uogólnienie wyników z [59], posługując pewnym ulepszeniem metody podanej przez Pytkiejewa w [59]; metoda Pytkiejewa była używana także w [40]. Niech $m$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Definiujemy

$$C_m = \{x \in I^\omega : \text{istnieje } n_0 \in \omega \text{ takie, że } x_n = \frac{1}{m+1} \text{ dla każdego } n \geq n_0\}.$$

Przez $\pi_k$ oznaczamy rzutowanie na $k$–tą $(k \in \omega)$ oś produktu kartezjańskiego $I^\omega$. Przez $\pi^1_k$, $\pi^2_k$ $(k \in \omega)$ oznaczamy rzutowania na osie produktu kartezjańskiego $I^\omega \times I^\omega$, $\pi^i_k(x^1, x^2) = x^i_k = \pi_k(x^i)$ $(i = 1, 2)$.

**Lemat 4.1.2.** *Niech $\Gamma$ będzie jedną z klas rzutowych $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ $(n \geq 1)$ i niech $X$ będzie elementem $\Gamma$, $M \subset X$ domkniętą podprzestrzenią $X$, oraz niech $f$ będzie ciągłym, różnowartościowym odwzorowaniem $f : M \to I^\omega \times (I^\omega \setminus C_m)$ takim, że $f[M]$ jest elementem $\Gamma(I^\omega \times I^\omega)$. Wtedy istnieje $g : X \to I^\omega \times I^\omega$ ciągłe, różnowartościowe odwzorowanie rozszerzające $f$, oraz takie, że $g(X \setminus M) \subset I^\omega \times C_m$. Co więcej, obraz $g[X]$ jest elementem $\Gamma(I^\omega \times I^\omega)$.*

*Dowód.* Niech $h$ będzie homeomorficznym włożeniem przestrzeni $X$ w $I^\omega$. Możemy przyjąć, że dla każdego $k \in \omega$ zbiór $\{n \in \omega : \pi_n \circ h = \pi_k \circ h\}$ jest nieskończony; faktycznie, mając dowolne włożenie, wystarczy wziąć przekątną $\Delta_{n\in\omega} h \to \Pi_{n\in\omega} I^\omega = I^\omega$. W przestrzeni metrycznej, ośrodkowej każdy zbiór otwarty jest typu $F_\sigma$, czyli można przedstawić go jako sumę przeliczalnie wielu zbiorów domkniętych. W szczególności istnieją $M_k$ $(k \in \omega)$, podzbiory domknięte przestrzeni $X$ takie, że $M_k \subset M_{k+1}$ oraz $\bigcup_{k\in\omega} M_k = X \setminus M$.

Dla ustalonej liczby $k \in \omega$ definiujemy

$$h^1_k : M_k \cup M \to [0,1]$$

$$h^2_k : M_k \cup M \to [0,1]$$

za pomocą następującej formuły

$$h^1_k(x) = \begin{cases} \pi^1_k(f(x)) & \text{dla } x \in M, \\ \pi_k(h(x)) & \text{dla } x \in M_k. \end{cases}$$

$$h^2_k(x) = \begin{cases} \pi^2_k(f(x)) & \text{dla } x \in M, \\ \frac{1}{m+1} & \text{dla } x \in M_k. \end{cases}$$

Zgodnie z twierdzeniem Tietzego, istnieją $g^1_k$, $g^2_k$ ciągłe przedłużenia funkcji $h^1_k$, $h^2_k$ $(k \in \omega)$ na całą przestrzeń $X$. Definiujemy $g^1$ i $g^2$ jako przekątną przekształceń $g^1_k$ i $g^2_k$ $(k \in \omega)$ oraz funkcję $g$ jako przekątną przekształceń $g_1$ i $g_2$. Zauważmy, że taka definicja gwarantuje, że funkcją $g$ zgadza się z funkcją $f$ na podprzestrzeni $M$.

Niech $k$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Dla każdego $l \in \omega$ ustalamy liczbę $n_l > k$ taką, że $\pi_{n_l} \circ h = \pi_l \circ h$. Przekątna przekształceń $\{g^1_{n_l}\}_{l\in\omega}$, po ograniczeniu do podprzestrzeni $M_k$, jest równa homeomorficznemu włożeniu przestrzeni $M_k$ w kostkę $I^\omega$. To oznacza, że $g$ (który zdefiniowaliśmy jako przekątną pewnej rodziny przekształceń, do której należą wszystkie funkcje $g^1_{n_l}$, $l \in \omega$), po ograniczeniu do $M_k$ jest homeomorficznym włożeniem. Klasa $\Gamma$ jest zamknięta na domknięte podprzestrzenie, homeomorfizmy oraz przeliczalne sumy. Dodatkowo założyliśmy, że obraz $f[M]$ jest elementem $\Gamma$. Zatem obraz $g[X] = g[\bigcup_{k\in\omega} M_k \cup M] = \bigcup_{k\in\omega} g[M_k] \cup f[M]$ jest także elementem $\Gamma$.

Wykażemy teraz, że zbiór $g[X \setminus M]$ zawiera się w $I^\omega \times C_m$. Jeśli $x \in X \setminus M$ to $x \in M_{k_0}$ dla pewnego $k_0 \in \omega$. Dla każdego $k \geq k_0$ ($k \in \omega$) mamy $h_k^2(x) = \frac{1}{m+1}$. To oznacza, że $g(x) \in I^\omega \times C_m$.

Powinniśmy jeszcze sprawdzić, że $g$ jest funkcją różnowartościową. Zauważmy, że wynika to z następujących obserwacji:

- rodzina $\{M_k\}_{k\in\omega}$ jest wstępująca,
- funkcja $g$, po ograniczeniu do zbioru $M_k$ ($k \in \omega$) jest różnowartościowa; podobnie, funkcja $g$ ograniczona do zbioru $M$ jest różnowartościowa,
- zachodzi $g(M) \cap g(X \setminus M) = \emptyset$.

□

Wykażemy teraz

**Twierdzenie 4.1.3.** *Jeśli $X$ jest zbiorem $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_1$–zupełnym lub $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_2$–zupełnym, to istnieje ciągłe, różnowartościowe odwzorowanie przestrzeni $X$ na przestrzeń $I^\omega \times I^\omega$. Przy dodatkowym założeniu Determinacji Rzutowej, takie odwzorowanie istnieje dla przestrzeni $X$, która jest $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$–zupełna ($n \geq 3$).*

*Dowód.* Niech $n > 0, n \in \omega$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $Y$ będzie ustaloną przestrzenią $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$–zupełną, zawartą w zbiorze Cantora (twierdzenie 2.7.1). Zauważmy, że przestrzeń $\omega \times 2^\omega$ zanurza się homeomorficznie w $2^\omega$. Ponadto, przestrzeń $\omega \times Y$ przechodzi przy takim zanurzeniu na pewien element $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(2^\omega)$. Zgodnie z naszym przypuszczeniem, że przestrzeń $X$ jest $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$–zupełna, istnieje domknięte włożenie $i : \omega \times Y \to X$. Definiujemy $D_k = i[\{k\} \times Y]$ ($k \in \omega$).

Rodzina $\{D_k\}_{k\in\omega}$ jest dyskretną rodziną zbiorów $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$–zupełnych. W szczególności, zgodnie z uwagą 2.7.6, dla każdego $k \in \omega$ zbiór $D_k$ zawiera domknięte kopie wszystkich podzbiorów zbioru Cantora, które należą do klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$.

Niech $\{F_k : k \in \omega\}$ będzie lokalnie skończoną rodziną podzbiorów domkniętych przestrzeni $X$, która pokrywa przestrzeń $X$ i dodatkowo $D_k \subset F_k \setminus \bigcup_{l<k} F_l$ ($k \in \omega$). Rodzinę $F_k$ ($k \in \omega$) możemy uzyskać przedłużając do funkcji ciągłej przekształcenie $f : \bigcup_{k\in\omega} D_k \to \mathbb{R}$,

$f|D_k = k$ $(k \in \omega)$; jeśli $g$ jest takim przedłużeniem, to $F_0$ definiujemy jako $g^{-1}(-\infty; \frac{1}{2}]$, $F_k = g^{-1}[k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}]$ $(k \geq 1, k \in \omega)$.

Definiujemy $A_k$ jako $\bigcup_{l \leq k} F_l$ $(k \in \omega)$; niech $B_k = I^\omega \times (I^\omega \setminus \bigcup_{l > k} C_l)$ $(k \in \omega)$. Zauważmy, że zachodzą równości $\bigcup_{k \in \omega} B_k = I^\omega \times I^\omega$ oraz $B_{k+1} = B_k \cup I^\omega \times C_{k+1}$ $(k \in \omega)$. Skonstruujemy rodzinę różnowartościowych ciągłych odwzorowań $f_k$ $(k \in \omega)$ takich, że

(1) $f_k : A_k \to I^\omega \times I^\omega$,

(2) obraz $f_k[A_k]$ należy do klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(I^\omega \times I^\omega)$,

(3) $f_{k+1}$ rozszerza $f_k$,

(4) $B_k \subset f_{k+1}[A_{k+1}] \subset B_{k+1}$ i $f_0[A_0] \subset B_0$.

Suma funkcji $f_k$ będzie żądaną bijekcją przestrzeni $X$ na przestrzeń $I^\omega \times I^\omega$.

Zaczniemy od zdefiniowania funkcji $f_0$. Niech $h$ będzie homeomorficznym włożeniem przestrzeni $X$ w przestrzeń $I^\omega$ i niech $f_0 : A_0 \to I^\omega \times I^\omega$ będzie przekątną obcięcia $h$ do zbioru $A_0$ oraz funkcji stałej, równej $(1, 1, \ldots) \in I^\omega$. Skoro obraz homeomorficzny $f_0[A_0]$ należy do klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(I^\omega \times I^\omega)$ oraz $f_0[A_0] \subset B_0$, funkcja $f_0$ wypełnia wszystkie warunki indukcyjne.

Niech $k$ będzie ustaloną liczba naturalną; przypuśćmy, że skonstruowaliśmy już funkcje $f_k$ z własnościami 1–4. Skoro $f_k[A_k]$ należy do $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(I^\omega \times I^\omega)$ oraz $B_k$ jest zbiorem borelowskim, to różnica $B_k \setminus f_k[A_k]$ jest elementem $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n(I^\omega \times I^\omega)$.

Zgodnie z twierdzeniem 2.7.8, istnieje podzbiór $C$ klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n(2^\omega)$ w zbiorze Cantora, oraz różnowartościowe, ciągłe odwzorowanie $g$ ze zbioru $C$ na przestrzeń $B_k \setminus f_k[A_k]$. Skoro $F_{k+1}$ zawiera, jako podzbiór domknięty, $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$–zupełny zbiór $D_{k+1}$, to zgodnie z uwagą 2.7.6 możemy przypuścić, że $C$ jest domkniętym podzbiorem $D_{k+1}$.

Definiujemy $f'_k : C \cup A_k \to I^\omega \times I^\omega$ jako sumę $f_k$ oraz $g$. Skoro obraz $f'_k[C \cup A_k]$ jest równy $B_k$ to wnioskujemy, że $f'_k[C \cup A_k]$ jest zbiorem borelowskim oraz $f'_k[C \cup A_k]$ jest podzbiorem $I^\omega \times (I^\omega \setminus C_{k+1})$. Stosujemy lemat 4.1.2 dla liczby $m = k + 1$ oraz funkcji $f'_k$ i definiujemy $f_{k+1} : A_{k+1} \to I^\omega \times I^\omega$ jako rozszerzenie, którego istnienie wynika z lematu 4.1.2.

Spełnienie warunków 1–3 wynika natychmiast ze sposobu, w jaki określiliśmy odwzorowanie $f_{k+1}$. Objaśnimy, dlaczego spełniony jest warunek 4. Zauważmy, że obraz funkcji $f'_k$ jest równy $B_k$, a zatem że obraz $f_{k+1}$ także zawiera $B_k$. To dowodzi pierwszej inkluzji w warunku 4. Zgodnie z lematem 4.1.2, obraz $f_{k+1}$ jest zawarty w sumie zbioru $I^\omega \times C_{k+1}$

i zbioru $f'_k[C \cup A_k] = B_k$. Zgodnie z definicją rodziny $\{B_k\}_{k\in\omega}$, suma jest równa zbiorowi $B_{k+1}$. To dowodzi, że zachodzi druga inkluzja w warunku 4. $\square$

## 4.2. **Wniosek dotyczący przestrzeni funkcji.**

**Twierdzenie 4.2.1.** *Niech $A$ będzie rzutowym podzbiorem przestrzeni polskiej, który nie jest zbiorem $\sigma$–zwartym. Przestrzeń $C_p(A)$ można zagęścić na kostkę $I^\omega$; o ile $A$ nie jest zbiorem analitycznym, to zakładamy, że zachodzi Determinacja Rzutowa.*

*Uwaga* 4.2.2. Archangielski w pracy [2] wykazał, że jeśli $A$ jest metryzowalną przestrzenią $\sigma$–zwartą, to przestrzeń $C_p(A)$ zagęszcza sie na przestrzeń zwartą. Wynik ten opiera sie na rezultacie Pytkiejewa z pracy [59] oraz na twierdzeniu, które głosi, że jeśli $A$ jest nieskończoną przestrzenią $\sigma$–zwartą, metryzowalną, oraz $D$ jest przeliczalnym gęstym podzbiorem $A$, to przestrzeń $C_D(A) \subset \mathbb{R}^D$ jest zbiorem borelowskim klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_3$ ([17], Lemma 6.1, [52], Theorem 6.3.10), który nie jest $\sigma$–zwarty ([52], Theorem 6.3.6).

Z twierdzenia Archangielskiego i twierdzenia 4.2.1 wynika, że jeśli $A$ jest zbiorem analitycznym (lub rzutowym, o ile przypuścimy, że zachodzi Determinacja Rzutowa), to $C_p(A)$ zagęszcza sie na przestrzeń zwartą.

*Dowód.* (twierdzenia 4.2.1) Jeśli $A$ jest zbiorem analitycznym, to definiujemy $n = 1$ and w przeciwnym razie $n \in \omega$ określamy jako najmniejszą taką liczbę, że $A \in \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$; wtedy $A \notin \underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$.

Niech $D$ będzie ustalonym gęstym, przeliczalnym podzbiorem zbioru $A$. Przez $\pi_D$ oznaczamy rzutowanie przestrzeni $\mathbb{R}^A$ na $\mathbb{R}^D$, $\pi_D(f) = f|D$. Definiujemy (por. paragraf 2.3)

$$\begin{aligned} C_D(A) &= \{f \in \mathbb{R}^D : f \text{ jest ograniczeniem pewnej funkcji z } C_p(A)\} = \\ &= \pi_D[C_p(A)] \end{aligned}$$

Andretta i Marcone (Lemma 2.3, [1]) wykazali, że jeśli $A$ należy do klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ to $C_D(A)$ jest zbiorem klasy $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^1_n$ w przestrzeni $\mathbb{R}^D$. Dla wygody czytelnika, przedstawimy tutaj proste sprawdzenie tego faktu. Dla $f \in \mathbb{R}^D$ mamy

$$\begin{aligned} f \notin C_D(A) \quad & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ & \exists x \in A\ \exists m \in \omega\ \forall n \in \omega \\ & \exists y_1, y_2 \in D \cap B(x, \tfrac{1}{n+1}) \\ & |f(y_1) - f(y_2)| > \tfrac{1}{m+1} \end{aligned}$$

Równoważnie, jeśli zdefiniujemy

$$\begin{aligned} A_{m,n,y_1,y_2} = \quad & \{(f,x) \in \mathbb{R}^D \times A : \ d(x,y_1) < \tfrac{1}{n+1}, d(x,y_2) < \tfrac{1}{n+1} \text{ and} \\ & |f(y_1) - f(y_2)| > \tfrac{1}{m+1}\} \end{aligned}$$

to dopełnienie przestrzeni $C_D(A)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^D$ może zostać zdefiniowane przy pomocy następującej formuły

$$\mathbb{R}^D \setminus C_D(A) = \pi[\bigcup_{m\in\omega} \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{y_1,y_2\in D} A_{m,n,y_1,y_2}]$$

gdzie $\pi$ jest rzutowaniem z $\mathbb{R}^D \times A$ na $\mathbb{R}^D$. Zbiór $\mathbb{R}^D \setminus C_D(A)$ należy do klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$ dla $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, gdyż zbiory $A_{m,n,y_1,y_2}$ są otwartymi podzbiorami zbioru $\mathbb{R}^D \times A$, należącego do klasy $\utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_n$, która jest zamknięta ze względu na przeliczalne przecięcia, przeliczalne sumy, rzutowania oraz branie otwartych podzbiorów.

Wykażemy teraz, że $C_D(A)$ spełnia założenia twierdzenia 4.1.3 (przypomnijmy, że jeśli $A \notin \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$, to przyjmujemy, że zachodzi Determinacja Rzutowa). Powinniśmy sprawdzić, że zbiór $C_D(A)$ jest $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$–zupełny; wynik ten uzyskali Andretta i Marcone ([1], twierdzenie 3.3 dla $A$ analitycznego, twierdzenie 4.3 dla rzutowego $A$). Przedstawimy tu dowód, który jest kompilacją idei zawartych w pracy [1].

Niech $X$ będzie metrycznym, ośrodkowym uzwarceniem przestrzeni $A$. Jeśli $A \in \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ (wiemy o $A$, że $A$ nie jest przestrzenią $\sigma$–zwartą) to zgodnie z twierdzeniem 2.7.11 istnieje homeomorficzna kopia zbioru Cantora $C \subset X$ taka, że $D \cap C = \emptyset$, oraz $C \cap A$, $C \cap (X \setminus A)$ są gęste w $C$, oraz $C \cap (X \setminus A)$ jest zbiorem przeliczalnym, homeomorficznym z $\mathbb{Q}$. Jeśli $A \notin \utilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$ (przypuszczamy, że $n > 1$), to zgodnie z lematem 2.7.12, przy założeniu Determinacji Rzutowej, istnieje redukcja każdego zbioru należącego do $\utilde{\mathbf{\Pi}}^1_{n-1}(2^\omega)$ do zbioru $A$. Twierdzenie Louveau i Saint–Raymond (twierdzenie 2.7.5) pozwala dodatkowo zakładać, że redukcja jest odwzorowaniem różnowartościowym. To dowodzi, że istnieje kopia zbioru Cantora $C \subset X$

taka, że $D \cap C = \emptyset$, $C \cap A$, $C \cap (X \setminus A) = C \setminus A$ są gęste w $C$, oraz $C \cap (X \setminus A) = C \setminus A$ jest $\undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_{n-1}$–zupełny.

Ustalamy metrykę na przestrzeni $X$. Jeśli $K$ jest zwartym podzbiorem zbioru $C$, to definiujemy funkcję $f_K : D \to \mathbb{R}$ za pomocą formuły $f_K(x) = \frac{1}{\mathrm{dist}(x,K)}$. Funkcja jest elementem przestrzeni $\mathbb{R}^D$. Niech $U = (a, b)$ będzie otwartym przedziałem liczb rzeczywistych i niech $x$ będzie dowolnym punktem w $D$. Niech $K_0 \in \{K \in \mathcal{K}(C) : f_K(x) \in U\}$. Niech $r = \min\{|f_{K_0}(x) - a|, |f_{K_0}(x) - b)|\}$. Jeśli $\mathrm{dist}(K, K_0) < r \cdot \mathrm{dist}^2(x, C)$ to

$$|\frac{1}{\mathrm{dist}(x,K_0)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(x,K)}| =$$

$$= |\frac{\mathrm{dist}(x,K) - \mathrm{dist}(x,K_0)}{(\mathrm{dist}(x,K) \cdot \mathrm{dist}(x,K_0))}| \leq$$

$$\leq |\frac{\mathrm{dist}(x,K) - \mathrm{dist}(x,K_0)}{\mathrm{dist}^2(x,C)}| < r$$

Ten rachunek dowodzi, że funkcja $\phi : \mathcal{K}(C) \to \mathbb{R}^D$, $\phi(K) = f_K$ jest odwzorowaniem ciągłym. Niech $K$ będzie ustalonym zwartym podzbiorem zbioru $C \setminus A$. Wtedy $f_K$ jest elementem $C_D(A)$, bowiem formuła $f_K(x) = \frac{1}{\mathrm{dist}(x,K)}$ określa funkcję ciągła na całej przestrzeni $A$. Jeśli $K \subset C$ ma punkt $x$ wspólny ze zbiorem $A$ to wtedy istnieje ciąg $\{d_n\}_{n\in\omega} \subset D$ taki, że $d_n \to x$. Co więcej, $f_K(d_n) \to +\infty$ a zatem funkcja $f_K$ nie może być przedłużona do funkcji ciągłej na przestrzeni $A$.

Podsumowując, funkcja $\phi$ ma następującą własność

$$K \in \mathcal{K}(C \setminus A) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \phi(K) \in C_D(A).$$

Jeśli $A \in \undertilde{\mathbf{\Sigma}}^1_1$ to $\mathcal{K}(C \setminus A)$ jest zbiorem koanalitycznie-zupełnym, gdyż zgodnie z twierdzeniem 2.7.7, zbiór $\mathcal{K}(\mathbb{Q})$ jest zbiorem koanalitycznie-zupełnym i zbiory $C \setminus A$ oraz liczby wymierne $\mathbb{Q}$ są ze sobą homeomorficzne. To dowodzi, że przestrzeń $C_D(A)$ is koanalitycznie-zupełna, co pozwala stosować twierdzenie 4.1.3. W przypadku, gdy $n \geq 2$, posługujemy się twierdzeniem 2.7.10 po to, by stwierdzić, że zbiór $\mathcal{K}(C \setminus A)$ jest $\undertilde{\mathbf{\Pi}}^1_n$–zupełny, a następnie stosujemy twierdzenie 4.1.3. □

4.3. **Wokół pytania Sierpińskiego.** Pytanie Sierpińskiego opisaliśmy we wstępie, gdzie objaśniliśmy, jaka jest relacja między wynikami tego paragrafu, a rozwiązaniem pytania Sierpińskiego, podanym w pracy [68]. Głównym wynikiem tego paragrafu jest

**Twierdzenie 4.3.1.** *Jeśli $A$ jest zbiorem koanalitycznie–zupełnym i zerowymiarowy, to każdy zbiór analityczny, nieprzeliczalny można uzyskać jako ciągły różnowartościowy obraz przestrzeni $A \bigoplus \omega$.*

Przekształcenie $f : X \to Y$ między przestrzeniami topologicznymi $X$ i $Y$ nazywamy *lokalnym homeomorfizmem*, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $x \in U$ oraz $f : U \to f[U]$ jest homeomorfizmem.

*Uwaga* 4.3.2. Zauważmy, że jeśli $A$ jest zbiorem koanalitycznym i $f : A \to X$ jest lokalnym homeomorfizmem, to $f[A] \subset X$ jest zbiorem koanalitycznym. Wynika to natychmiast z faktu, że wszystkie rozpatrywane przez nas zbiory koanalityczne są metryzowalne i ośrodkowe i z faktu, że klasa zbiorów koanalitycznych jest zamknięta na przeliczalne sumy.

Dla danej przestrzeni topologicznej punkt $x \in X$ jest *punktem kondensacji*, jeśli dla każdego otoczenia otwartego $U \subset X$, $x \in U$ moc zbioru $U$ jest nieprzeliczalna.

Rozumowanie będzie oparte na tej samej metodzie, co dowód twierdzenia 4.1.3, wzbogaconej o pewną konstrukcję i o lemat 4.3.6 będący 0–wymiarowym odpowiednikiem lematu 4.1.2. Poniższe rozumowanie zainspirowane jest dowodem Lemma 2.5 z pracy Hjortha ([31]).

Będziemy posługiwać się oznaczeniami, wprowadzonymi w paragrafie 2.10, odnoszącymi się do ciągów skończonych i drzew. Przed dowodem lematu 4.3.6 udowodnimy kilka faktów pomocniczych:

**Lemat 4.3.3.** *Niech $K, L \subset \omega^\omega$ będą homeomorficznymi kopiami zbioru Cantora. Wtedy istnieje $M \subset L$, homeomorficzna kopia zbioru Cantora taka, że $K \cap M$ jest zbiorem brzegowym w $K$.*

*Dowód.* Jeśli $K \cap L$ jest zbiorem przeliczalnym, to posługując się twierdzeniem 2.7.4 znajdujemy $M$, homeomorficzną kopię zbioru Cantora w zbiorze $L \setminus K$. Jeśli $L \cap K$ jest zbiorem nieprzeliczalnym to posługując się twierdzeniem 2.7.4 znajdujemy $N \subset K \cap L$, kopię zbioru Cantora. Następnie w zbiorze $N$ znajdujemy kopię zbioru Cantora $M \subset N$, która jest zbiorem brzegowym w $N$, a więc także brzegowym w $K$. □

**Lemat 4.3.4.** *Niech $T \subset \omega^{<\omega}$ będzie drzewem. Przypuśćmy, że dane są zbiory $K_t \subset [t]$, $K_t$ homeomorficzne kopie zbioru Cantora dla $t \in T$. Wtedy istnieją zbiory $M_t \subset K_t$, kopie zbioru Cantora, $M_s \cap M_t$ brzegowe w $M_s$ dla $t, s \in T, s \subset t, s \neq t$.*

*Dowód.* Definiujemy $M_\emptyset = K_\emptyset$. Przypuszczamy, że dla $0 \leq i < j \leq n-1$ i $t \in \omega^j$ już skonstruowaliśmy $M_t \subset K_t$, homeomorficzne kopie zbioru Cantora, brzegowe w $M_{t|i}$. Ustalamy $n \in \omega$ i $t \in \omega^n$. Stosujemy lemat 4.3.3 do zbiorów $K_t$ i $M_\emptyset$ i otrzymujemy zbiór $N_t^0 \subset K_t$, homeomorficzną kopię zbioru Cantora, brzegową w $M_\emptyset$. Kolejno stosujemy lemat 4.3.3 do $N_t^i$ i $M_{t|i+1}$ $(0 \leq i < n-1)$ i ostatecznie dostajemy $M_t = N_t^{n-1}$, homeomorficzną kopię zbioru Cantora, brzegową we wszystkich zbiorach $M_{t|i}$ $(0 \leq i < n)$. □

**Lemat 4.3.5.** *Przypuśćmy, że dane jest drzewo $T \subset \omega^{<\omega}$ oraz zbiory $K_t$ $(t \in T)$, homeomorficzne kopie zbioru Cantora, $K_t \subset [t]$. Wtedy istnieją zbiory $L_t \subset K_t$ $(t \in T)$, homeomorficzne kopie zbioru Cantora takie, że jeśli $t \neq s$, to $L_t \cap L_s = \emptyset$.*

*Dowód.* Stosujemy lemat 4.3.4 do rodziny $K_t$ i otrzymujemy zbiory $M_t$ $(t \in T)$. Ustalamy $t \in T$. W zbiorze $M_t \setminus \bigcup_{s \in T_t \setminus \{t\}} M_s$ znajdujemy przy pomocy twierdzenia 2.7.4, kopię zbioru Cantora $L_t$.

Zauważmy, że jeśli nie zachodzi $t \subset s$, ani $s \subset t$ to zbiory $[t]$ i $[s]$ są rozłączne $(t, s \in \omega^{<\omega})$. W połączeniu z warunkami konstrukcji to gwarantuje, że zdefiniowane przez nas zbiory $L_t$ $(t \in T)$ mają żądane własności. □

**Lemat 4.3.6.** *Niech $D, E, F$ będą podzbiorami przestrzeni $\omega^\omega$, $E \cap F = \emptyset$. Niech $C \subset D$ będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni $D$. Przypuśćmy, że dla każdego $t \in \omega^{<\omega}$, jeśli zbiór $E \cap [t]$ jest niepusty, to przecięcie $(F \cap [t]) \setminus E$ zawiera kopię zbioru Cantora $K_t$.*

*Wtedy dla danej funkcji ciągłej $f : C \to E$ istnieje ciągłe, różnowartościowe przedłużenie $g : D \to E \cup F$, przy czym $g$ po obcięciu do zbioru $D \setminus C$ jest lokalnym homeomorfizmem.*

*Dowód.* Niech $T = \{t \in \omega^{<\omega} : E \cap [t] \neq \emptyset\}$. Zauważmy, że zbiór $T$ jest drzewem. Zgodnie z lematem 4.3.5 możemy przypuścić, że zbiory $K_t$ $(t \in T)$ są parami rozłączne. Rozszerzenie będziemy definiowali tak, że dla każdego zbioru $[s] \cap D$ rozłącznego z $C$ $(s \in \omega^{<\omega})$ przedłużenie $g$, po obcięciu do $[s] \cap D$, będzie homeomorfizmem, którego obraz będzie rozłączny z obrazem $f[C]$ i dla $s_1, s_2 \in \omega^{<\omega}$, obrazy $g([s_1] \cap D)$, $g([s_2] \cap D)$ będą rozłączne, o ile nie zachodzi $s_1 \subset s_2$, ani $s_2 \subset s_1$.

Kładziemy $g(x) = f(x)$ dla $x \in C$. Niech $S_n$ będzie zbiorem tych wszystkich ciągów $s \in \omega^n$, dla których zachodzi $[s] \cap C = \emptyset$. Przypuśćmy, że dla pewnego $n \in \omega$ zdefiniowaliśmy już $g$ na zbiorach $[s] \cap D$, $s \in S_i$ $(i \leq n)$. Niech $s \in \omega^{n+1}$, $[s] \cap C = \emptyset$. Jeśli $s|n$ jest elementem

$S_n$, to funkcja $g$ jest już określona na $[s]$. Przypuśćmy więc, że $s|n \notin S_n$. Wobec tego istnieje $t_s \in \omega^{<\omega}$, $t_s$ długości $n+1$, dla którego zachodzi $f([s|n] \cap C) \cap [t_s] \neq \emptyset$. Z naszych założeń wynika, że $(F \cap [t_s]) \setminus E$ zawiera kopię zbioru Cantora $K_{t_s}$; definiujemy $g$ na zbiorze $D \cap [s]$ jako włożenie $D \cap [s]$ w $K_{t_s}$.

Pozostaje sprawdzić, czy takie określenie daje funkcję ciągłą. Niech $t \in \omega^{<\omega}$ i niech $x \in D$, $g(x) \in [t]$. Naszym zadaniem jest znaleźć takie $s \in \omega^{<\omega}$, dla którego $x \in [s]$ i $g([s] \cap D) \subset [t]$. Zachodzą dwie możliwości:

- Jeśli $x \notin C$, to znajdujemy znajdujemy najmniejsze $n \in \omega$ takie, że $x|n \in S_n$. Wtedy $g$, po obcięciu do zbioru $[x|n] \cap D$, jest homeomorficznym włożeniem, co dowodzi ciągłości funkcji $g$ w punkcie $x$.
- Jeśli $x \in C$ to istnieje $s$ takie, że $x \in [s]$ i $f([s] \cap C) \subset [t]$. Bez straty ogólności możemy przypuszczać, że $s$ jest długości co najmniej takiej, jak $t$. Niech $y \in [s]$, $y \in D \setminus C$. Istnieje $n \in \omega$ takie, że $[y|(n+1)] \cap C = \emptyset$, ale $[y|n] \cap C \neq \emptyset$. Niech $r = y|(n+1)$. Wtedy $g$ po obcięciu do $[r] \cap D$ jest homeomorficznym włożeniem w zbiór $K_{t_r}$, gdzie $f([r|n] \cap C) \cap [t_r] \neq \emptyset$. Jednak $t_r$ jest ciągiem dłuższym, niż $s$. Zatem $[t_r] \cap [t] = \emptyset$ lub $[t_r] \subset [t]$. Skoro $f([r|n] \cap C) \cap [t_r] \neq \emptyset$ i jednocześnie $f([r|n] \cap C) \subset f([s] \cap C) \subset [t]$, to $[t_r] \subset [t]$. Ostatecznie,

  $$g(y) \in g([r] \cap D) \subset K_{t_r} \subset [t_r] \subset [t],$$

  co dowodzi ciągłości $g$ w punkcie $x$.

Różnowartościowość $g$ wynika z tego, że $f$ jest różnowartościowa oraz zbiory $K_t$ są parami rozłączne. $\square$

*Dowód.* (twierdzenia 4.3.1) Niech $B$ będzie nieprzeliczalnym zbiorem analitycznym. Zbiór $A$ jest zbiorem zerowymiarowym, więc bez straty ogólności możemy przyjmować, że $A \subset \omega^\omega$. Znajdziemy ciągłe, różnowartościowe odwzorowanie ze zbioru $A \bigoplus \omega$ na zbiór $B$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $B$ jest podzbiorem $\omega^\omega$ ([35, Theorem 13.7] w połączeniu z faktem, że ciągłe przeciwobrazy zbiorów analitycznych są analityczne, [35, Proposition 37.1]). Dalej, bez straty ogólności możemy przyjąć, że $B$ składa się wyłącznie z punktów kondensacji. Istotnie, innych punktów w zbiorze $B$ jest conajwyżej przeliczalnie wiele ([35, Theorem 6.4]); definiujemy $f$ na $I \subset (\omega \setminus \{0\})$ jako bijekcję ze zbiorem tych punktów w $B$, które nie są punktami kondensacji. Jeśli po odrzuceniu punktów kondensacji pozostał zbiór zwarty, to odrzucamy z niego jeden punkt $x_0$ i definiujemy $f(0) = x_0$. Ostatecznie, do zbioru $A$ dorzucamy zbiór $\omega \setminus I$ lub $\omega \setminus (I \cup \{0\})$; w każdym przypadku zbiór $A$ pozostaje koanalitycznie-zupełny. Odtąd będziemy przypuszczać, że $B$ składa się wyłącznie z punktów kondensacji i nie jest zwarty; twierdzenie będzie udowodnione, gdy uda nam się skonstruować ciągłą bijekcję z $A$ na $B$.

Zbiory $[t] \cap B$ są puste lub nieprzeliczalne dla wszystkich $s \in \omega^{<\omega}$, gdyż w $B$ są tylko punkty kondensacji. Niech $T = \{t \in \omega^{<\omega} : [t] \cap B \text{ nieprzeliczalne}\}$. Zauważmy, że w każdym zbiorze $[t] \cap B$ $(t \in T)$ można wybrać homeomorficzną kopię zbioru Cantora $K_t$. W każdym ze zbiorów $K_t$ znajdujemy przeliczalnie wiele rozłącznych kopii zbioru Cantora $K_t^n$ $(n \in \omega, n > 0, t \in T)$.

Niech $t_n \in T, n \in \omega$ będzie rodziną ciągów skończonych, takich, że $[t_{n_1}] \cap [t_{n_2}] = \emptyset$ dla $n_1 \neq n_2$, oraz $B \subset \bigcup_{n \in \omega} [t_n]$, $B \cap [t_n] \neq \emptyset$ dla $n \in \omega$. Ten ostatni warunek możemy sobie zapewnić, gdyż zbiór $B$ nie jest zwarty. Definiujemy

$$\begin{aligned} B_n = \ & [\{x \in B : x \text{ przedłuża } t_n\} \cup (\textstyle\bigcup_{k<n} \bigcup \{K_r^n : r \text{ przedłuża } t_k,\ r \in T\})] \setminus \\ & \textstyle\bigcup_{k>n} \bigcup \{K_r^k : r \text{ przedłuża } t_n,\ r \in T\} \end{aligned}$$

Zauważmy, że $B_n \cap B_m = \emptyset$, $B_n$ są zbiorami analitycznymi $(n, m \in \omega, n \neq m)$ oraz $\bigcup_{n \in \omega} B_n = B$. Mając zbiory $B_n$, postępujemy analogicznie, jak w dowodzie twierdzenia 4.1.3. Niech $F_n \subset A$ $(n \in \omega)$ będzie pokryciem lokalnie skończonym złożonym z podzbiorów domkniętych i takim, że każdy ze zbiorów $F_n$ zawiera domknięty podzbiór $A_n$, rozłączny z $\bigcup_{k<n} F_k$ i koanalitycznie-zupełny (por. z początkiem dowodu twierdzenia 4.1.3). W zbiorze $A_0$ istnieje podzbiór domknięty $E_0$ (twierdzenie 2.7.9) na którym określona jest ciągła bijekcja $f_0 : E_0 \to B_0$. Będziemy korzystać z lematu 4.3.6, gdzie za $C$ bierzemy $E_0$, za $D$ zbiór $F_0$, za $E$ zbiór $B_0$ i za $F$ zbiór $B_1$. Funkcję $f_0$, zgodnie z tym lematem, można rozszerzyć do ciągłej bijekcji $g_0$, określonej na całym zbiorze $F_0$. Zbiór $B_1 \setminus g_0[F_0]$ jest analityczny, gdyż $B_1$ jest zbiorem analitycznym i by uzyskać z niego zbiór $B_1 \setminus g_0[F_0]$, trzeba wyrzucić zbiór koanalityczny; wynika to z faktu, że $g_0$ obcięte do zbioru koanalitycznego $F_0 \setminus E_0$ jest lokalnym homeomorfizmem (zob. uwaga 4.3.2).

W zbiorze $A_1$ istnieje podzbiór domknięty $E_1$, na którym określona jest ciągła bijekcja $b_1$ na analityczny zbiór $B_1 \setminus g_0[F_0]$. Definiujemy funkcję $f_1 : E_1 \cup F_0 \to B_0 \cup B_1$ jako równą

$g_0$ na $F_0$ i równą $b_1$ na $E_1$. Zgodnie z lematem 4.3.6 funkcję $f_1$ można rozszerzyć do ciągłej bijekcji $g_1 : F_0 \cup F_1 \to B_0 \cup B_1 \cup B_2$. Z lematu 4.3.6 korzystamy, biorąc za $C$ zbiór $E_1 \cup F_0$, za $D$ zbiór $F_0 \cup F_1$, za $E$ zbiór $B_0 \cup B_1$ i za $F$ zbiór $B_2$.

Przez indukcję budujemy $g_n : \bigcup_{k \leq n} F_k \to \bigcup_{k \leq n} B_k$, aż do wyczerpania zbiorów $A$ i $B$. Suma $\bigcup_{n \in \omega} g_n$ jest żądaną bijekcją między $A$ i $B$. $\square$

*Uwaga* 4.3.7. W pracy [31] używana jest podobna metoda budowy zagęszczenia z tym, że autor pomija uzasadnienie odpowiednika naszego lematu o przedłużaniu 4.3.6.

4.4. **Zagęszczenia przestrzeni Banacha.** W odpowiedzi na pytanie T. Banakha i Pliczko z pracy [8] wykażemy, że każdą przestrzeń Banacha można zagęścić na przestrzeń zwartą. Poniższy argument został zasugerowany przez Romana Pola.

Zgodnie z twierdzeniem Klee [37, Theorem III.1.3], kula jednostkowa $K$ w nieskończenie wymiarowej rzeczywistej przestrzeni Hilberta $l^2(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : \sum_{i \in \Gamma} x_i^2 < \infty\}$ jest homeomorficzna z całą przestrzenią $l^2(\Gamma)$. Z drugiej strony, zgodnie z twierdzeniem Toruńczyka ([74, Theorem 6.1], korekta [75]), każda przestrzeń Frecheta, a w szczególności każda przestrzeń Banacha, jest homeomorficzna z pewną przestrzenią Hilberta. Jeśli dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń Frecheta, to jest to przestrzeń lokalnie zwarta i możemy posłużyć się faktem 4.1.1.

Możemy zatem przypuścić, że dana jest nieskończenie wymiarowa przestrzeń Frecheta. Na mocy powyższych wyników, by wykazać, że można ją zagęścić na przestrzeń zwartą, wystarczy zauważyć, że domknięta kula jednostkowa $K$ w przestrzeni Hilberta $l^2(\Gamma)$ zagęszcza się na przestrzeń zwartą. Istotnie, odwzorowanie identycznościowe $id : (K, || \cdot ||_2) \to (K, w)$ jest szukanym zagęszczeniem, gdzie przestrzeń $(K, w)$ jest kulą jednostkową ze słabą topologią (por. [28, Theorem 65]).

## 5. Iloczyny grup o–ograniczonych

5.1. **Wprowadzenie.** W tym i w następnym rozdziale będziemy rozważać abelowe grupy topologiczne; element neutralny grupy będziemy oznaczać symbolem $0 = 0_G$, działanie grupowe będziemy oznaczać symbolem $+$. Jeśli $A, B \subset G$, to przez $A + B$ oznaczamy zbiór $\{x + y \in G : x \in A, y \in B\}$.

Grupa topologiczna $G$ jest *o–ograniczona*, jeśli dla każdego ciągu $U_n \subset G$ $(n \in \omega)$ otwartych otoczeń $0 \in G$, istnieje ciąg skończonych podzbiorów $F_n \subset G$ $(n \in \omega)$ taki, że $G = \bigcup(U_n + F_n)$. C. Hernandez wykazał w [30] (Theorem 2.1), że każda podgrupa grupy o–ograniczonej jest o–ograniczona, że wszystkie grupy $\sigma$–zwarte są o–ograniczone, a także, że produkt grupy $\sigma$–zwartej i grupy o–ograniczonej jest o–ograniczony ([30, Theorem 5.3]). O tej klasie grup wiadomo także, że

**Fakt 5.1.1.** *(Theorem 2.3 w* [30]*) Jeśli $G$ jest o–ograniczona, $H$ jest homomorficznym, ciągłym obrazem $G$, to $H$ także jest o–ograniczona.*

**Fakt 5.1.2.** *(Theorem 2.6 w* [30]*) Grupa $\mathbb{Z}^\omega$ nie jest o–ograniczona. Ogólniej, jeśli $G$ zawiera zbiór wszędzie dominujący (por. paragraf 2.9), to $G$ nie jest o–ograniczona.*

W tym rozdziale podamy dwie konstrukcje przykładów grup o–ograniczonych, metrycznych, ośrodkowych, który produkt nie jest o–ograniczony. Podobny przykład był podany w [29], jednak jego własności były wykazane przy użyciu fałszywych stwierdzeń zawartych w opisie Example 6.1 w [30]; na fałszywość tych stwierdzeń zwrócił naszą uwagę Michaił Tkaczenko. Rozumowanie przedstawione poniżej, użyte wcześniej w [29] w innym celu, dowodzi że Example 6.1 nie posiada własności deklarowanych w [30].

W Example 6.1 w pracy [30] autor rozważa podgrupę $H$ w $\mathbb{R}^\omega$ generowana przez zbiór $G = \{x \in \mathbb{R}^\omega : \forall_{n\in\omega}\ \exists_{m\geq n} x_m \neq 0,\ \lim_{k\to\infty} \frac{x(n_k^x)}{n_{k+1}^x} = 0\}$, gdzie $n_k^x$ $(k \in \omega)$ jest rosnącą numeracją niezerowych współrzędnych ciągu $x$ (tzn. $n_0^x$ to pierwsze miejsce niezerowe $x$, $n_1^x$ drugie, itd.). Według autora [30] grupa $H$ jest o–ograniczona, a według autorów [29] iloczyn $H \times H$ nie jest o–ograniczony. Faktycznie jednak już grupa $H$ nie jest o–ograniczona. By to wykazać, zauważmy najpierw, że grupa $H$ zawiera w szczególności zbiór $G + G$. Niech teraz $U_n = \{x \in H : |x_k| < 1 \text{ dla } k \leq n\}$ $(n \in \omega)$. Jest to ciąg otoczeń $0_H$; rozważmy ciąg zbiorów skończonych $F_n \subset H$. Niech $r_n = \max\{|x_k| : x \in F_j,\ k, j \leq n\}$.

Naszkicujemy konstrukcję indukcyjną elementów $x+y \in G+G \subset H$ takich, że $x+y \notin \bigcup_{n\in\omega} U_n + F_n$. To pokaże, że grupa $H$ nie jest o–ograniczona.

Ciągi $x, y \in G$ skonstruujemy indukcyjnie. Definiujemy $k_0 = k_1 = 0$ oraz $x_{k_0} = r_{k_1} + 1$ i wybieramy $k_2 \in \omega$ tak duże, by $\frac{x_{k_0}}{k_2} < 1$. Definiujemy $y_{k_1} = r_{k_2} + 1$. Takie określenie gwarantuje, że $x \notin U_k + F_k$ dla $k_0 \leq k \leq k_1$ oraz $y \notin U_k + F_k$ dla $k_1 \leq k \leq k_2$. Niech $k_3 > k_2$ będzie tak duże, by $\frac{y_{k_1}}{k_3} < \frac{1}{2}$. Zadajemy $x_{k_2} = r_{k_3} + 1$ i znajdujemy $k_4 > k_3$ tak duże, by $\frac{x_{k_2}}{k_4} < \frac{1}{3}$. Określamy $y_{k_3} = r_{k_4} + 1$. Takie określenie gwarantuje, że $x \notin U_k + F_k$ dla $k_2 \leq k \leq k_3$ oraz $y \notin U_k + F_k$ dla $k_3 \leq k \leq k_4$.

Jeśli zdefiniowaliśmy już $x_{k_0}, y_{k_1}, \ldots, x_{k_n}, y_{k_{n+1}}$ oraz liczby $k_0, \ldots, k_{n+2} \in \omega$ ($n$ liczba parzysta) to wybieramy $k_{n+3} > k_{n+2}$ takie, by $\frac{y_{k_{n+1}}}{k_{n+3}} < \frac{1}{n+2}$. Zadajemy $x_{k_{n+2}} = r_{k_{n+3}} + 1$, znajdujemy $k_{n+4} > k_{n+3}$ takie, by $\frac{x_{k_{n+2}}}{k_{n+4}} < \frac{1}{n+3}$. Definiujemy $y_{k_{n+3}} = r_{k_{n+4}} + 1$. Takie określenie gwarantuje, że $x \notin U_k + F_k$ dla $k_{n+2} \leq k \leq k_{n+3}$ oraz $y \notin U_k + F_k$ dla $k_{n+3} \leq k \leq k_{n+4}$. To kończy definicję indukcyjną. Na pozostałych miejscach określamy $x_k = y_k = 0$.

Powyższa definicja gwarantuje, że $x, y \in G$, gdyż $n_l^x = k_{2l}$, $\frac{x_{n_l^x}}{n_{l+1}^x} = \frac{x_{k_{2l}}}{k_{2l+2}} < \frac{1}{2l+1}$ i podobnie $n_l^y = k_{2l+1}$, $\frac{y_{n_l^y}}{n_{l+1}^y} = \frac{y_{k_{2l+1}}}{k_{2l+3}} < \frac{1}{2l+2}$ dla każdego $l \in \omega$. Dla danego $k \in \omega$ zachodzi $x+y \notin U_k + F_k$, gdyż istnieje $n \in \omega$ takie, że $k_n \leq k \leq k_{n+1}$ i jeśli $n$ jest parzyste to $x \notin U_k + F_k$, a jeśli $n$ jest nieparzyste to $y \notin U_k + F_k$. To dowodzi, że grupa $H$ nie jest o–ograniczona.

5.2. **(CH) Istnieją o–ograniczone podgrupy $X, Y \subset \mathbb{Z}^\omega$ takie, że $X + Y = \mathbb{Z}^\omega$.** W konstrukcji posłużymy się ideami znanymi z literatury (por. [21],[33]); nasza metoda jest bardzo bliska indukcyjnej procedurze zawartej w dowodzie Theorem 13 z pracy [64].

Przez $[n]$ oznaczamy otoczenie $0 \in \mathbb{Z}^\omega$ złożone z tych ciągów, które na pierwszych $n$ miejscach mają liczbę $0 \in \mathbb{Z}$. Oznaczenie takie jest używane także w paragrafach 5.4 i 7.2. Numerujemy wszystkie rosnące ciągi liczb naturalnych jako $\{r^\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$. Niech $\{z_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ będzie numeracją wszystkich punktów $\mathbb{Z}^\omega$. Niech $\mathcal{Q}$ będzie ustalonym gęstym, przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{Z}^\omega$. Przez indukcję znajdziemy punkty $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{Z}^\omega$ oraz skończone podzbiory $F_n^\alpha, G_n^\alpha \subset \mathbb{Z}^\omega$ ($\alpha < \omega_1, n \in \omega$) takie, że podgrupy $X_\alpha, Y_\alpha \subset \mathbb{Z}^\omega$ wygenerowane odpowiednio przez zbiór $\mathcal{Q} \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ i przez zbiór $\mathcal{Q} \cup \{y_\beta : \beta < \alpha\}$ ($\alpha < \omega_1$) spełniają warunki:

(1) $x_\alpha + y_\alpha = z_\alpha$,

(2) dla każdego $\beta \leq \alpha$ zachodzi $X_{\alpha+1} \subset \bigcup_{n\in\omega}([r_n^\beta] + F_n^\beta)$ oraz $Y_{\alpha+1} \subset \bigcup_{n\in\omega}([r_n^\beta] + G_n^\beta)$.

Niech $\alpha < \omega_1$ będzie ustaloną liczbą porządkową; przypuśćmy, że zostały już skonstruowane punkty $x_\beta, y_\beta \in \mathbb{Z}^\omega$ oraz zbiory $F_n^\beta, G_n^\beta \subset \mathbb{Z}^\omega$ $(\beta < \alpha, n \in \omega)$, spełniające warunki 1 i 2. Grupy $X_\alpha$, $Y_\alpha$ są przeliczalne, a więc możemy znaleźć skończone zbiory $F_n^\alpha, G_n^\alpha \subset \mathbb{Z}^\omega$ $(n \in \omega)$ takie, że $X_\alpha \subset \bigcup_{n\in\omega}([r_n^\alpha] + F_n^\alpha)$, $Y_\alpha \subset \bigcup_{n\in\omega}([r_n^\alpha] + G_n^\alpha)$.

Zauważmy, że dla $\beta \leq \alpha$ i $k \in \mathbb{Z}$ oraz $u \in X_\alpha$, $w \in Y_\alpha$ zbiory $O_{u,k}^\beta = \{x \in \mathbb{Z}^\omega : k \cdot x + u \in \bigcup_{n\in\omega}([r_n^\beta] + F_n^\beta)\}$, $P_{w,k}^\beta = \{x \in \mathbb{Z}^\omega : k \cdot x + w \in \bigcup_{n\in\omega}([r_n^\beta] + G_n^\beta)\}$ są otwarte i gęste w $\mathbb{Z}^\omega$. Wykażemy, że $\mathcal{Q} \subset O_{u,k}^\beta$. Ustalmy $k \in \mathbb{Z}$, $u \in X_\alpha$ i $x \in \mathcal{Q}$. Wiemy, że $k \cdot x + u \in X_\alpha \subset \bigcup_{n\in\omega}([r_n^\beta] + F_n^\beta)$; zatem $x \in O_{u,k}^\beta$. Podobnie przekonujemy się, że $\mathcal{Q} \subset P_{w,k}^\beta$.

Definiujemy

$$C = \Big(\bigcap_{u\in X_\alpha, \beta\leq\alpha, k\in\mathbb{Z}} O_{u,k}^\beta\Big) \cap \Big(\bigcap_{w\in Y_\alpha, \beta\leq\alpha, k\in\mathbb{Z}} P_{w,k}^\beta\Big)$$

Zbiór $C$ jest gęstym podzbiorem typu $G_\delta$ w $\mathbb{Z}^\omega$. Wybieramy $x_\alpha$ jako dowolny punkt w zbiorze $C \cap (z_\alpha - C)$. Następnie definiujemy $y_\alpha \in \mathbb{Z}^\omega$ jako

$$y_\alpha = z_\alpha - x_\alpha.$$

Zauważmy, że skoro $x_\alpha \in z_\alpha - C$ to $y_\alpha \in C$.

Powinniśmy sprawdzić, czy spełniony jest warunek 2 konstrukcji indukcyjnej. Niech $x \in X_{\alpha+1}$. Wykażemy, że dla każdego $\beta \leq \alpha$ punkt $x$ jest elementem $\bigcup_{n\in\omega}([r_n^\beta] + F_n^\beta)$. Zauważmy, że dla pewnego $u \in X_\alpha$ i $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość $x = k \cdot x_\alpha + u$. Z wyboru punktu $x_\alpha$ wynika, że $x_\alpha \in O_{u,k}^\beta$. To oznacza, że $x = k \cdot x_\alpha + u \in ([r_n^\beta] + F_n^\beta)$ dla pewnego $n \in \omega$.

Niech teraz $y \in Y_{\alpha+1}$. Dla pewnego $w \in Y_\alpha$ i $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi równość $y = k \cdot y_\alpha + w$. Wiemy, że dla pewnego $n \in \omega$ zachodzi $k \cdot y_\alpha + w \in [r_n^\beta] + G_n^\beta$. Udowodniliśmy zatem, że punkty $x_\alpha, y_\alpha$ zostały wybrane tak, by był spełniony warunek 2. indukcji.

Definiujemy

$$X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$$

oraz

$$Y = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Y_\alpha.$$

Istotnie, zgodnie z warunkiem 1 konstrukcji indukcyjnej zachodzi równość $X + Y = \mathbb{Z}^\omega$. Sprawdzimy, że grupy $X, Y$ są o–ograniczone. Niech $U_n$ $(n \in \omega)$ będzie ciągiem otoczeń $0_X$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że dla pewnego $\beta < \omega_1$ zachodzi równość $U_n = [r_n^\beta]$ $(n \in \omega)$.

Jeśli $x \in X$ to istnieje $\alpha < \omega_1$ takie, że $\beta \leq \alpha$ oraz $x \in X_\alpha$. Zgodnie z warunkiem 2 konstrukcji indukcyjnej wiemy, że zachodzi zależność $x \in X_{\alpha+1} \subset \bigcup_{n\in\omega}[r_n^\beta] + F_n^\beta$. To dowodzi, że $X \subset \bigcup_{n\in\omega}[r_n^\beta] + F_n^\beta$. Podobne rozumowanie pokazuje, że $Y$ także jest grupą o–ograniczoną.

Iloczyn $X \times Y$ nie jest grupą o–ograniczoną. Zgodnie z faktem 5.1.1 wystarczy wykazać, że istnieje homomorfizm ciągły $X \times Y$ na grupę, która nie jest o–ograniczona. Niech $f : X \times Y \to \mathbb{Z}^\omega$, $f(x, y) = x + y$. Jest to ciągły homomorfizm, którego obrazem jest grupa $\mathbb{Z}^\omega$, która zgodnie z faktem 5.1.2, nie jest o–ograniczona.

*Uwaga* 5.2.1. W paragrafie 5.2 zamiast Hipotezy Continuum można posłużyć się aksjomatem Martina lub równością $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{d}$.

5.3. **o–ograniczoność grup generowanych przez przestrzenie dyskretne.** Niech $D_\kappa$ będzie dyskretną przestrzenią mocy $\kappa$. Przez $C(D_\kappa)$ będziemy oznaczać przestrzeń wszystkich funkcji rzeczywistych na $D_\kappa$. Definiujemy zanurzenie przestrzeni $D_\kappa$ w iloczyn prostych $\mathbb{R}^{C(D_\kappa)}$, przypisując punktowi $x \in D_\kappa$ funkcję $v_x : C(D_\kappa) \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $v_x(f) = f(x)$ $(f \in C(D_\kappa))$. Definiujemy przestrzeń $\mathrm{Gen}(D_\kappa)$ jako podgrupę $\mathbb{R}^{C(D_\kappa)}$ generowaną przez rodzinę $\{v_x\}_{x\in D_\kappa}$. Identyfikujemy przestrzeń $D_\kappa$ z przestrzenią $\{v_x\}_{x\in D_\kappa}$.

Każdej funkcji ciągłej $f \in C(D_\kappa)$ można w kanoniczny sposób przypisać przedłużenie $g : \mathrm{Gen}(D_\kappa) \to \mathbb{R}$, które jest ciągłym homomorfizmem. Funkcję $f$ można utożsamić z rzutem $\pi_f : \mathbb{R}^{C(D_\kappa)} \to \mathbb{R}$ obciętym do zbioru $\{v_x : x \in D_\kappa\}$. Funkcja $\pi_f|\mathrm{Gen}(D_\kappa)$ jest żądanym przedłużeniem. Zauważmy, że jeśli $f \in C(D_\kappa)$ przyjmowała wyłącznie własności z $\mathbb{Z}$, to przedłużenie także będzie miało tą własność. Odwzorowanie $f : D_\kappa \to \mathbb{Z}^\omega$ można kanonicznie przedłużyć do ciągłego homorfizmu $g : \mathrm{Gen}(D_\kappa) \to \mathbb{Z}^\omega$, przedłużając z osobna każdą współrzedną $f$.

Mówimy, że grupa $G$ jest $\aleph_0$*–ograniczona*, jeśli dla każdego otwartego $U \subset G$, będącego otoczeniem $0_G$, istnieje przeliczalny zbiór $F \subset G$ taki, że $U + F = G$ (por. [73, Definition 3.1]). Jeśli $\kappa$ jest mocy mniejszej niż $\mathfrak{d}$ (por. paragraf 2.9), to $\mathrm{Gen}(D_\kappa)$ jest grupą o–ograniczoną. Faktycznie, dotyczy to wszystkich grup $\aleph_0$–ograniczonch mocy mniejszej niż $\mathfrak{d}$ (a w szczególności wszystkich grup metrycznych, ośrodkowych mocy mniejszej niż $\mathfrak{d}$), o czym zaświadcza następujące rozumowanie, zaczerpnięte z pracy Fremlina i Millera ([23, Theorem 3]).

Niech $U_n$ ($n \in \omega$) będzie ciągiem otoczeń $0_{\mathrm{Gen}(D_\kappa)}$. Wiadomo, że dla każdego $n \in \omega$ istnieje przeliczalny zbiór $D_n \subset \mathrm{Gen}(D_\kappa)$ o tej własności, że $U_n + D_n = \mathrm{Gen}(D_\kappa)$ (jest to prawda dla każdej podgrupy $\mathbb{R}^{C(D_\kappa)}$, gdyż każda podgrupa $\mathbb{R}^{C(D_\kappa)}$ jest $\aleph_0$–ograniczona, por. [73, Proposition 3.2]). Ponumerujmy elementy $D_n$ jako $D_n = \{d_{n,m} : m \in \omega\}$. Dla $v \in \mathrm{Gen}(D_\kappa)$ zadajemy funkcje $f_v : \omega \to \omega$ wzorem

$$f_v(n) = \min\{m \in \omega : v \in U_n + d_{n,m}\}.$$

Skoro $\mathrm{Gen}(D_\kappa)$ ma mniej, niż $\mathfrak{d}$ generatorów, to jest mocy mniejszej niż $\mathfrak{d}$, a zatem istnieje $g : \omega \to \omega$ takie, że dla każdego $f_v$ ($v \in \mathrm{Gen}(D_\kappa)$) istnieje $n \in \omega$ na którym zachodzi nierówność $f_v(n) \leq g(n)$. Pokażemy, że $\mathrm{Gen}(D_\kappa) \subset \bigcup_{n\in\omega} U_n + \{d_{n,m}\}_{m \leq g(n)}$. Niech $v \in \mathrm{Gen}(D_\kappa)$ i niech $n$ takie, że $f_v(n) \leq g(n)$. Wtedy $v \in U_n + d_{n,f_v(n)} \subset U_n + \{d_{n,m}\}_{m\leq g(n)}$. To dowodzi, że $\mathrm{Gen}(D_\kappa)$ jest o–ograniczona.

Przypuśćmy teraz, że $\kappa \geq \mathfrak{d}$. Istnieje podgrupa $G$ mocy $\kappa$ w $\mathbb{Z}^\omega$, która zawiera podzbiór wszędzie dominujący w $\omega^\omega \subset \mathbb{Z}^\omega$. Zauważmy, że $G$ nie jest o–ograniczona; istotnie, jeśli weźmiemy otoczenia $U_n = \{x \in \mathbb{Z}^\omega : x_i = 0 \text{ dla } i \leq n\}$ ($n \in \omega$) i przypuścimy, że dane są skończone zbiory $F_n \subset G$ ($n \in \omega$). Możemy wtedy zdefiniować $g : \omega \to \omega$ wzorem $g(n) = \max\{|f(n)| : f \in F_n\}$ i z definicji $G$, możemy znaleźć $h \in G$, $h : \omega \to \omega$, $h(n) > g(n)$ dla wszystkich $n \in \omega$. Zauważmy, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $h \notin U_n + F_n$, gdyż dla $f \in U_n + F_n$ mamy $f(n) \in [-g(n), g(n)]$. To przekonuje, że $G$ nie jest grupą o–ograniczoną.

Jednocześnie, istnieje surjektywna funkcja $g : D_\kappa \to G \subset \mathbb{Z}^\omega$, którą zgodnie z uwagami na początku tego paragrafu, możemy przedłużyć do ciągłego, surjektywnego homomorfizmu $g : \mathrm{Gen}(D_\kappa) \to G$. Wiemy, że grupy o–ograniczone zachowują się przy ciągłych homomorfizmach, a zatem $\mathrm{Gen}(D_\kappa)$ nie jest o–ograniczona, o ile $\kappa \geq \mathfrak{d}$.

*Uwaga* 5.3.1. Przypadek przestrzeni dyskretnej mógłby budzić nadzieję na konstrukcje bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych, pary niemetrycznych grup $G_1$, $G_2$, które byłyby o–ograniczone, ale których iloczyn nie byłby o–ograniczony.

Na mocy twierdzenia C. Hernandeza ([30], Theorem 4.1), $\aleph_0$–ograniczona grupa $G$ jest o–ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie homomorficzne, ciągłe obrazy metryczne ośrodkowe są o–ograniczone. Każda grupa o–ograniczona jest $\aleph_0$–ograniczona. Jak wykazał Guran ([27]; dowód twierdzenia Gurana można znaleźć w pracy [73], Theorem 3.4), klasa grup $\aleph_0$–ograniczonych jest zamknięta ze względu na branie iloczynów i co więcej, dana grupa jest $\aleph_0$–ograniczona wtedy i tylko wtedy, gdy można ją włożyć izomorficznie w iloczyn grup metrycznych ośrodkowych.

Zebrawszy te wszystkie informacje przypuśćmy, że dana są grupy o–ograniczone $G_1$, $G_2$, których iloczyn nie jest o–ograniczony. Wiemy, że $G_1 \times G_2$ jest $\aleph_0$–ograniczony, a więc istnieje grupa metryczna ośrodkowa $H$, która nie jest o–ograniczona, oraz epimorfizm ciągły $h : G_1 \times G_2 \to H$. Zgodnie z twierdzeniem Gurana, grupy $G_1$, $G_2$ wkładają sie w iloczyn grup metrycznych ośrodkowych ($G_1 \subset \Pi_{i \in I_1} L_i^1$, $G_2 \subset \Pi_{i \in I_2} L_i^2$) i zgodnie z twierdzeniem faktoryzacyjnym (twierdzenie 2.8.1), homomorfizm $h$ faktoryzuje się przez iloczyn $\pi_{J_1}[G_1] \times \pi_{J_2}[G_2]$, dla pewnych przeliczalnych zbiorów $J_1 \subset I_1$, $J_2 \subset I_2$. Grupy $\pi_{J_1}[G_1]$, $\pi_{J_2}[G_2]$ są metryczne ośrodkowe i o–ograniczone (jako homomorficzne obrazy grup o–ograniczonych), jednak ich iloczyn nie jest o–ograniczony, gdyż odwzorowuje się przez homomorfizm ciągły na grupę $H$.

Powyższą obserwację można wyrazić jako

**Fakt 5.3.2.** *Jeśli istnieje para grup o–ograniczonych $G, H$ takich, że $G \times H$ nie jest grupą o–ograniczoną, to istnieje para grup o–ograniczonych, metrycznych i ośrodkowych $G', H'$ takich, że $G' \times H'$ nie jest grupą o–ograniczoną.*

Zauważmy, że w dowodzie powyższego faktu nie korzystaliśmy z abelowości grup $G$ i $H$.

5.4. **Konstrukcje grup o–ograniczonych przy użyciu filtrów.** W tym paragrafie podamy inny przykład pary grup o–ograniczonych, których iloczyn nie jest o–ograniczony. Przykład będzie skonstruowany przy dodatkowym założeniu teoriomnogościowym, które jednak jest na tyle słabe, że pozwala na wykorzystanie tej konstrukcji do problemu, który będziemy rozważać w paragrafie 7.2, a który dotyczy istnienia grupy metrycznej, o–ograniczonej, która nie jest silnie o–ograniczona. W tym paragrafie będziemy posługiwać się terminologią dotycząca filtrów na zbiorze $\omega$, którą ustaliliśmy w paragrafie 2.11.

Dla filtru $F \subset 2^\omega$ definiujemy zbiór

$$A_F = \{x \in \mathbb{Z}^\omega : \exists\ A \in F\ \forall\ n \in A\ \forall_{i \leq n}\ |x_i| \leq n\}.$$

*Uwaga* 5.4.1. Dla każdego filtru $F \subset 2^\omega$ zachodzą następujące fakty:

- Jeśli $x \in A_F$ oraz $y \in \mathbb{Z}^\omega$ takie, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $|y_n| \leq |x_n|$, to $y \in A_F$.

- Do $A_F$ należą wszystkie funkcje, które od pewnego miejsca są stałe.
- Niech $x \in A_F$. Dla $n \in \omega$ definiujemy $y_n = \max\{|x_k| : k \leq n\}$. Wtedy $y \in A_F$ i dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $y_n \geq |x_n|$; dodatkowo, funkcja $y$ jest niemalejąca.

**Lemat 5.4.2.** *Dla każdego filtru $F \subset 2^\omega$ grupa $X_F \subset \mathbb{Z}^\omega$ wygenerowana przez zbiór $A_F$ jest o–ograniczona.*

*Dowód.* Dla liczby naturalnej $n \in \omega$ definiujemy, tak jak w paragrafach 5.2 i 7.2, zbiór $[n] = \{x \in \mathbb{Z}^\omega : x(i) = 0 \text{ dla } 0 \leq i < n\}$. Na potrzeby tego rozumowania rozszerzamy definicję o–ograniczoności na wszystkie podzbiory $A \subset \mathbb{Z}^\omega$; dokładniej, mówimy, że *zbiór $A \subset \mathbb{Z}^\omega$ jest o–ograniczony*, jeśli dla każdego ściśle rosnącego ciągu liczb naturalnych $r_l$ $(l \in \omega)$ istnieje ciąg liczb $k_l \in \omega$ $(l \in \omega)$ o tej własności, że dla każdego $x \in A$ istnieje $l \in \omega$ takie, że dla każdego $i \leq r_l$ zachodzi $|x(i)| \leq k_l$. Zbiór o–ograniczony, o ile jest grupą topologiczną, to jest grupą o–ograniczoną.

Definiujemy zbiór

$$Z_F = \{x \in \mathbb{Z}^\omega : \exists\, A \in F\ \forall\, n \in A\ \forall\, i \leq n\ |x_i| \leq n^2\}.$$

Wykażemy najpierw, że zbiór $Z_F$ jest o–ograniczony, a następnie przekonamy się, że grupa $X_F$ jest podzbiorem $Z_F$, a więc tym samym jest także o–ograniczona.

Niech $r_n \in \omega$ $(n \in \omega)$ będzie ciągiem ściśle rosnącym; definiujemy $k_n = r_{n+1}^2$. Niech $x \in Z_F$. Z definicji wynika, że istnieje $A \in F$ taki, że dla każdego $n \in A$ i dla każdego $0 \leq i \leq n$ zachodzi $|x_i| \leq n^2$. Niech $n \in A$, $n > r_0$. Istnieje $l \in \omega$ takie, że $n \in [r_l; r_{l+1})$. Dla każdego $0 \leq i \leq n$ zachodzi $|x_i| \leq n^2$ i jednocześnie $k_l = r_{l+1}^2 \geq n^2$, a zatem dla każdego $0 \leq i \leq r_l \leq n$ zachodzi

$$|x_i| \leq n^2 \leq r_{l+1}^2 = k_l.$$

Zatem $Z_F$ jest zbiorem o–ograniczonym.

Wykażemy teraz, że $X_F$ jest podzbiorem $Z_F$. Niech $x \in X_F$. Istnieją $x^1, \dots x^l \in A_F$ oraz liczby całkowite $a_1, \dots a_l$ takie, że $x = \sum_{k=1}^{l} a_k \cdot x^k$. Skoro $x^1, \dots x^l$ są elementami $A_F$, to istnieją $A_1, \dots A_l$ takie, że dla każdego $n \in A_k$ $(1 \leq k \leq l)$ i dla każdego $0 \leq i \leq n$ zachodzi $|x_i^k| \leq n$ $(1 \leq k \leq l)$.

Znajdujemy $a \in \omega$, $a$ większe od $\sum_{k=1}^{l} |a_k|$. Definiujemy $A = (\bigcap_{k=1}^{l} A_k) \setminus \{0, \dots a\}$. Zauważmy, że $A \in F$. Niech $n \in A$ i niech $0 \le i \le n$. Zauważmy, że $n > a$. Zachodzi

$$|x_i| = |\sum_{k=1}^{l} a_k \cdot x_i^k| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{l} |a_k||x_i^k| \le \sum_{k=1}^{l} |a_k| n \le n \cdot n = n^2.$$

Wykazaliśmy zatem, że $X_F \subset Z_F$. □

Niech $\pi = \{J_n\}_{n \in I}$ będzie podziałem zbioru $\omega$ na zbiory skończone. Przez $f_\pi : \omega \to \omega$ będziem oznaczać odwzorowanie, które przypisuje ultrafiltrowi $F \subset 2^\omega$ ultrafiltr

$$f(F) = \{A \subset I : \bigcup_{n \in A} J_n \in F\}.$$

**Lemat 5.4.3.** *Jeśli $F, G$ są ultrafiltrami o tej własności, że dla każdego podziału $\pi$ zbioru liczb naturalnych na zbiory skończone, ultrafiltry $f_\pi(G)$ i $f_\pi(G)$ są różne, to zachodzi $\mathbb{Z}^\omega \subset X_F + X_G$. W szczególności $X_F \times X_G$ nie jest grupą o–ograniczoną.*

*Uwaga* 5.4.4. Ultrafiltry $F$ i $G$ są *podobne* (w angielskiej terminologii $F$ i $G$ są *near coherent*), jeśli istnieje podział $\pi$ zbioru liczb naturalnych na zbiory skończone taki, że ultrafiltry $f_\pi(F)$ i $f_\pi(G)$ są równe.

Jak wykazali Blass i Shelah w pracy [14], istnienie ultrafiltrów $F$, $G$ które nie są podobne jest niezależne od aksjomatyki ZFC. Z [51, Proposition 3.2 oraz Figure 1] wynika, że nieistnienie dwóch niepodobnych ultrafiltrów jest równoważne nierówności $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}_5$, a w szczególności ich istnienie jest zagwarantowane, jeśli zachodzi równość $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. Liczby kardynalne $\mathfrak{u}$ i $\mathfrak{g}_5$ są zdefiniowane w pracy [51].

Stwierdzenie, że wszystkie ultrafiltry są podobne (*aksjomat o podobieństwie filtrów*, od angielskiego *near coherence of filters*), okazało się równoważne pewnym zagadnieniom z zakresu teorii grup topologicznych, teorii operatorów w przestrzeniach Hilberta i teorii continuów ([11],[12],[13],[20]).

*Dowód.* (lematu 5.4.3) Niech $X = X_F$ i $Y = X_G$. Niech $f : \omega \to \omega$ będzie dowolną funkcją ściśle rosnącą. Wskażemy $x \in A_F \subset X$ i $y \in A_G \subset Y$ takie, że $x + y = f$. Zważywszy na uwagę 5.4.1, wykażemy w ten sposób, że $\mathbb{Z}^\omega \subset X + Y$.

Niech $k_0 = 0$, $k_{n+1} = f(k_n)$ dla $n \in \omega$, $n > 0$. Niech $I_n = [k_n; k_{n+2})$ dla $n \in \omega$, $n$ parzyste. Niech $J_n = [k_n; k_{n+2})$ dla $n \in \omega$, $n$ nieparzyste i niech $L_n = [k_n; k_{n+1})$ dla $n \in \omega$. Wiemy, że istnieją $A, B \subset \omega$ takie, że $\bigcup_{n\in A} I_n \in F$ i $\bigcup_{n\in\omega\setminus A} I_n \in G$ oraz $\bigcup_{n\in B} J_n \in F$ i $\bigcup_{n\in\omega\setminus A} J_n \in G$.

Ustalmy $n \in \omega$, liczbę parzystą. Zdefiniujemy $x$ i $y$, analizując cztery różne przypadki:

(1) Jeśli $n \in A$ i $n+1 \notin B$ to definiujemy $y|L_n = f|L_n$, $x|L_n = 0$ i $y|L_{n+1} = 0$, $x|L_{n+1} = f|L_{n+1}$.

(2) Jeśli $n \in A$ i $n+1 \in B$ to definiujemy $y|L_n \cup L_{n+1} = f|L_n \cup L_{n+1}$, $x|L_n \cup L_{n+1} = 0$.

(3) Jeśli $n \notin A$ i $n+1 \in B$ to definiujemy $x|L_n = f|L_n$, $y|L_n = 0$ i $x|L_{n+1} = 0$, $y|L_{n+1} = f|L_{n+1}$.

(4) Jeśli $n \notin A$ i $n+1 \notin B$ to definiujemy $x|L_n \cup L_{n+1} = f|L_n \cup L_{n+1}$, $y|L_n \cup L_{n+1} = 0$.

Niewątpliwie $x + y = f$. Pozostaje sprawdzić, że $x \in A_F \subset X$ oraz $y \in A_G \subset Y$. Ustalmy $k \in (\bigcup_{n\in A} I_n \cap \bigcup_{n\in B} J_n) \in F$. By wykazać, że $x \in A_F$, wystarczy udowodnić, że dla każdego $i \le k$ zachodzi $x_k \le k$. Niech $n_0, n_1 \in \omega$ będą takimi liczbami, że $k \in I_{n_0} = [k_{n_0}; k_{n_0+2})$, $k \in J_{n_1} = [k_{n_1}; k_{n_1+2})$. Wtedy $n_0 \in A$ i $n_1 \in B$. Przypuśćmy, że $n_0 < n_1$. Wtedy $n_1 = n_0 + 1$ i o liczbie $k$ możemy stwierdzić, że $k \in L_{n_0+1}$; bez straty ogólności możemy przypuścić, że $k = k_{n_0+1}$ (gdyż na mocy punktu 2 naszej definicji, element $x$ jest stały, równy zero na całym przedziale $I_{n_0}$, a w szczególności na przedziale $L_{n_0+1}$). Liczba $k_{n_0+1} = f(k_{n_0})$ jest większa niż $x_i$ dla $i \le k_{n_0+1}$, gdyż $f$ jest funkcją rosnącą, wartości $x$ nie przekraczają wartości $f$ oraz $x|L_{n_0} = 0$.

Przypuśćmy teraz, że $n_1 < n_0$. Wtedy $n_0 = n_1 + 1$ i o liczbie $k$ możemy stwierdzić, że $k \in L_{n_1+1}$; bez straty ogólności możemy przypuścić, że $k = k_{n_1+1}$ (gdyż na mocy punktu 2 i punktu 1 naszej definicji, element $x$ jest stały, równy zero na całym przedziale $L_{n_1+1}$). Liczba $k_{n_1+1} = f(k_{n_1})$ jest większa niż $x_i$ dla $i \le k_{n_1+1}$, gdyż $f$ jest funkcją rosnącą, wartości $x$ nie przekraczają wartości $f$ oraz $x|L_{n_1} = 0$ (przy ostatniej równości odwołujemy się do punktu 3 i punktu 2 naszej definicji).

W analogiczny sposób można sprawdzić, że zbiór $(\bigcup_{n\in\omega\setminus A} I_n \cap \bigcup_{n\in\omega\setminus B} J_n) \in G$ zaświadcza o tym, że $y \in A_G$.

Tak jak w paragrafie 5.2, z faktu, że $\mathbb{Z}^\omega \subset X_F + X_G$ wnioskujemy, że $X_F \times X_G$ nie jest grupą o–ograniczoną. $\square$

## 6. P–grupy Lindelofa i grupy silnie o–ograniczone.

6.1. **Wprowadzenie.** Wskażemy przykład grupy topologicznej, która w sensie struktury topologicznej jest P–przestrzenią Lindelofa, ale która nie jest grupą silnie o–ograniczona. Motywacja do szukania takiego przykładu została podana we wstępie, gdzie także opisujemy inne własności naszego grupy.

W paragrafie 6.2 sformułujemy definicje; w paragrafie 6.3 opiszemy grupę $G$, która jest wyżej wskazanym przykładem. W paragrafie 6.4 udowodnimy, że grupa $G$ nie jest silnie o–ograniczona, a w paragrafie 6.5 wykażemy, używając metody znanej w literaturze, że grupa $G$ jest P–przestrzenią Lindelofa.

6.2. **Definicje.** W tym rozdziale będziemy zakładać, że wszystkie przestrzenie topologiczne są całkowicie regularne. Przestrzeń topologiczna $X$ jest *P–przestrzenią* jeśli dla każdego rodziny $G_n \subset X$ $(n \in \omega)$ złożonej ze zbiorów otwartych w $X$, przecięcie $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ jest zbiorem otwartym w $X$.

Pojęcie grupy o–ograniczonej zostało wprowadzone w paragrafie 5.1. Dla grupy $G$ określamy grę $\Gamma(G)$ tak, że gracz I zagrywa w $n$–tym ruchu $(n \in \omega)$ zbiorem $U_n \subset G$ $(n \in \omega)$, które jest otwarty otoczeniem $0 \in G$, natomiast gracz II odpowiada skończonym podzbiorem $K_n \subset G$ $(n \in \omega)$.

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I} & U_0 & & U_1 & & \\ & & & & & \dots \\ \mathrm{II} & & K_0 & & K_1 & \end{array}$$

Gracz II wygrywa grę, jeśli $G \subset \bigcup_{n\in\omega}(U_n + K_n)$. Grupa topologiczna jest *silnie o–ograniczona*, jeśli gracz II ma strategię wygrywającą w grze $\Gamma(G)$. Więcej informacji na temat gier można znaleźć w paragrafie 8.H i rozdziale 21 książki [35]. Gry pokryciowe podobne do naszej były rozważane między innymi w [24],[63],[70],[71]. Z definicji wynika, że każda grupa silnie o–ograniczona jest o–ograniczona. Od tej pory będziemy w tym rozdziale zakładać, że wszystkie grupy są abelowe.

6.3. **Opis przykładu.** Przypomnijmy, że tak samo jak w paragrafie 3.3, symbol Lim oznacza zbiór wszystkich granicznych liczb porządkowych mniejszych niż $\omega_1$. Jest to zbiór domknięty i nieograniczony. Z definicji wynika, że część wspólna danego zbioru stacjonarnego

$S \subset \omega_1$ i zbioru Lim jest zbiorem stacjonarnym. Dla każdego $\alpha \in$ Lim ustalamy ciąg rosnący $(s_n^\alpha)_{n\in\omega}$ złożony z przeliczalnych liczb porządkowych, którego granica jest równa $\alpha$. Dla $f : \omega_1 \to \{0,1\}$ definiujemy *nośnik* $f$ jako $\mathrm{supp}(f) = \{\alpha < \omega_1 : f(\alpha) \neq 0\}$. Zauważmy, że jest to inne pojęcia nośnika niż to, które było użyte w paragrafie 3.4. Podobnym pojęciem będziemy posługiwać się w paragrafie 7.2. Jeśli $K \subset \{0,1\}^{\omega_1}$ to definiujemy $\mathrm{supp}(K) = \bigcup_{f\in K} \mathrm{supp}(f)$.

Niech $E$ będzie zbiorem złożonym z tych wszystkich funkcji $f : \omega_1 \to \{0,1\}$ które należą do jednej z następujących dwóch klas:

(1) $f$ ma skończony nośnik lub

(2) istnieje $\alpha < \omega_1$ taka, że dla każdego $\beta < \omega_1$ zachodzi równość $f(\beta) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta = s_n^\alpha$ dla pewnego $n \in \omega$ lub $\beta = \alpha$. Innymi słowy funkcja $f$ jest funkcją charakterystyczną postaci $\chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}}$.

W przestrzeni $2^{\omega_1}$ wprowadzamy taką strukturę grupową jak w grupie $\mathbb{Z}_2^{\omega_1}$. Definiujemy grupę $G$ jako zbiór tych wszystkich funkcji $f \in 2^{\omega_1}$ dla których istnieją elementy $f_1, \ldots, f_n \in E$ takie, że $f = f_1 + \ldots + f_n$. Dla $f \in G$ oraz $\alpha < \omega_1$ definiujemy $B(f,\alpha) = \{g \in G : f|\alpha = g|\alpha\}$. Rodzina $\{B(f,\alpha)\}_{\alpha<\omega_1, f\in G}$ stanowi bazę przestrzeni $G$. Baza ta ma moc $\omega_1$.

6.4. **Grupa G nie jest silnie o–ograniczona.** Przypuśćmy przeciwnie, że w grze $\Gamma(G)$ gracz II dysponuje strategią wygrywającą $F$.

W takiej sytuacji

- zdefiniujemy funkcje regresywną $\phi : \mathrm{Lim} \to \omega_1$ and
- z każdą liczbą graniczną $\alpha \in \omega_1$ zwiążemy
  - liczbę naturalną $n_\alpha$ oraz
  - (być może pusty) rosnący ciąg $(\beta_0^\alpha, \ldots, \beta_{n_\alpha-1}^\alpha)$ liczb porządkowych mniejszych, niż $\phi(\alpha)$

takie, że

$$\chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}} \notin \bigcup_{k\leq n_\alpha-1} B(0,\beta_k^\alpha) + F(B(0,\beta_0^\alpha), \ldots, B(0,\beta_k^\alpha)). \tag{1}$$

i dla każdego $\beta$, takiego że $\alpha > \beta \geq \phi(\alpha) > \beta_{n_\alpha-1}^\alpha$ zachodzi warunek

$$\chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}} \in B(0,\beta) + F(B(0,\beta_0^\alpha), \ldots, B(0,\beta_{n_\alpha-1}^\alpha), B(0,\beta)). \tag{2}$$

Niech $\alpha$ będzie dowolną graniczną liczbą porządkową mniejszą niż $\omega_1$. Jeśli istnieje $\beta$, $\alpha > \beta > s_0^\alpha$ taka, że

$$\chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}} \notin B(0,\beta) + F(B(0,\beta))$$

to definiujemy $\beta_0^\alpha = \beta$. Indukcyjnie, jeśli istnieje $\beta$, $\alpha > \beta > \max\{s_n^\alpha, \beta_{n-1}^\alpha\}$ taka, że $\chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}} \notin B(0,\beta) + F(B(0,\beta_0^\alpha), \dots, B(0,\beta_{n-1}^\alpha), B(0,\beta))$ to definiujemy $\beta_n^\alpha = \beta$.

Skoro strategia $F$ jest wygrywająca dla gracza II, istnieje krok indukcyjny $n_\alpha$, dla którego powyższa procedura nie może zostać przeprowadzona. Definiujemy $\phi(\alpha) = \max\{s_{n_\alpha}^\alpha, \beta_{n_\alpha-1}^\alpha\} + 1$. Taka definicja gwarantuje nam wypełnienie warunków (1),(2).

Zgodnie z lematem Fodora (lemat 2.5.1), istnieje liczba $\gamma < \omega_1$ oraz zbiór stacjonarny $S \subset \omega_1$ takie, że $\phi(\alpha) = \gamma$ dla każdej liczby $\alpha \in S$. Dla każdego ciągu skończonego $t$ złożonego z liczb porządkowych mniejszych niż $\gamma$ definiujemy zbiór $S_t = \{\alpha : (\beta_0^\alpha, \dots, \beta_{n_\alpha-1}^\alpha) = t\}$. Zważywszy na fakt, że istnieje tylko przeliczalnie wiele takich ciągów, istnieje

$$t = (\beta_0, \dots, \beta_{|t|-1}) \tag{3}$$

dla którego zbiór $S_t$ jest zbiorem stacjonarnym. Istotnie, w przeciwnym razie otrzymalibyśmy sprzeczność z lematem 2.5.2. Definiujemy

$$K_\beta = F(B(0,\beta_0), \dots, B(0,\beta_{|t|-1}), B(0,\beta)) \text{ dla } \beta < \omega_1. \tag{4}$$

Przez indukcję zbudujemy teraz

- ciąg zbiorów stacjonarnych $T_m \subset S_t$ $(m \in \omega)$ oraz
- ciąg $\{s_m\}_{m\in\omega}$ liczb porządkowych

dla których będą spełnione warunki

$$T_{m+1} \subset T_m \text{ oraz} \tag{5}$$

$$\text{dla każdej liczby } \alpha \in T_{m+1} \text{ zachodzi } (s_0^\alpha, \dots, s_m^\alpha) = (s_0, \dots, s_m). \tag{6}$$

Definiujemy $T_0 = S_t$. Dla każdego $\alpha \in T_0$ oraz $m \in \omega$ definiujemy $\psi_m(\alpha) = s_m^\alpha$. Zgodnie z lematem 2.5.1 istnieje stacjonarny zbiór $T_1 \subset T_0$ oraz liczba $s_0 < \omega_1$ takie, że dla każdego $\alpha \in T_1$ zachodzi $\psi_0(\alpha) = s_0$. W kolejnych krokach, posługując się lematem 2.5.1, definiujemy w analogiczny sposób zbiory $T_{m+1} \subset T_m$ oraz liczby $s_m < \omega_1$ takie, że $\psi_m(\alpha) = s_m$ dla $\alpha \in T_{m+1}$. Zbiory $T_m$ $(m \in \omega)$ spełniają warunki (5), (6).

Definiujemy

$$\beta = \max\{\gamma, \sup_{m\in\omega} s_m\}.$$

Niech $\alpha_m \in T_m$ będzie dowolną liczbą spełniającą warunek $\alpha_m > \beta$ ($m \in \omega$). Zgodnie z warunkiem (2) oraz definicją (4), dla każdego $m \in \omega$ zachodzi

$$\chi_{\{s_n^{\alpha_m}\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha_m\}} \in B(0,\beta) + K_\beta.$$

Stąd dla każdego $m \in \omega$ istnieje $f_m \in B(0,\beta)$ oraz $g_m \in K_\beta$ takie, że $\chi_{\{s_n^{\alpha_m}\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha_m\}} = f_m + g_m$.

Dążymy do pokazania, że rodzina $\{g_m\}_{m\in\omega}$ jest nieskończona. To da sprzeczność z przypuszczeniem, że zbiór $K_\beta$ jest skończony. Zauważmy najpierw, że dla każdego $m \in \omega$ oraz $s < \beta$ zachodzi $f_m(s) = 0$ a w konsekwencji

$$g_m(s) = \chi_{\{s_n^{\alpha_m}\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha_m\}}(s). \tag{7}$$

Zdefiniujemy rosnący ciąg liczb naturalnych $m_k \in \omega$ ($k \in \omega$) tak, by dla każdego $k, k' \in \omega$, $k \neq k'$ zachodziło $g_{m_k+1} \neq g_{m_{k'}+1}$. Niech $m_0 = 0$. Skoro $\sup_{m\in\omega} s_m \leq \beta < \alpha_{m_0+1} = \alpha_1$, to istnieje liczba $m_1$ o tej własności, że dla każdego $m \geq m_1$ zachodzi $g_{m_0+1}(s_m) = 0$. Przez indukcje wybieramy $m_k$ ($k \in \omega$) takie, że dla każdego $m \geq m_{k+1}$ zachodzi $g_{m_k+1}(s_m) = 0$. To kończy konstrukcję ciągu $m_k \in \omega$ ($k \in \omega$).

Zauważmy teraz, że jeśli dane są liczby $k, k' \in \omega$, $k < k'$ to zachodzi $m_{k'} \geq m_{k+1}$ i na mocy konstrukcji jest spełniona równość $g_{m_k+1}(s_{m_{k'}}) = 0$. Zgodnie z warunkiem (6) i równością (7) mamy

$$g_{m_{k'}+1}(s_{m_{k'}}) = \chi_{\{s_n^{\alpha_{m_{k'}+1}}\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha_{m_{k'}+1}\}}(s_{m_{k'}}) = 1.$$

To dowodzi, że dla każdej pary liczb $k, k' \in \omega$, $k \neq k'$ zachodzi $g_{m_k+1} \neq g_{m_{k'}+1}$.

6.5. $G$ **jest P–przestrzenią Lindelofa.** Rozpocznijmy od obserwacji, że grupa $G$ jest P–przestrzenią, gdyż jeśli dany jest ciąg zstępujący $B(0,\alpha_n)$ ($\alpha_n < \omega_1$, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$) bazowych otoczeń $0 \in G$, to przecięcie tego ciągu jest otwartym otoczeniem $0_G$ postaci $B(0,\alpha)$, gdzie $\alpha = \sup_{n\in\omega} \alpha_n$.

Naszym zadaniem jest teraz sprawdzić, że grupa $G$ jest przestrzenią Lindelofa. W większej ogólności zostało to udowodnione w [15], a nasz szczególny przypadek był wykazany, z dokładnością do bardzo niewielkich poprawek, w pracach [56], [71]; dla wygody czytelnika przytaczamy tu prostą i kompletną argumentację.

Przypomnijmy, że symbolem $E$ oznaczamy zbiór generatorów grupy $G$. Na to, by wykazać, że grupa $G$ jest przestrzenią Lindelofa, wystarczy sprawdzić, że dla każdego $n \in \omega$ przestrzeń $E^n$ jest przestrzenią Lindelofa. Faktycznie, zauważmy, że jeśli odwzorowanie $h_n : E^n \to G$ zdefiniowane jest wzorem $h_n(f_1, \ldots, f_n) = f_1 + \ldots + f_n$ to zachodzi równość $G = \bigcup h_n[E^n]$. Własność Lindelofa grupy $G$ wyniknie z tego, że dla każdego $n \in \omega$ przestrzeń $h_n[E^n]$, jako ciągły obraz przestrzeni Lindelofa, jest przestrzenią Lindelofa, a klasa przestrzeni Lindelofa jest zamknięta na przeliczalne sumy (por. paragraf 2.2).

Dla $\alpha < \omega_1$ definiujemy $C_\alpha$ jako zbiór tych wszystkich funkcji z $E$, których nośnik jest zawarty w liczbie $\alpha$; zbiór $C_\alpha$ jest przeliczalny. Niech $n \in \omega, n > 0$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni $E^n$.

Jeśli dane są funkcje $f_1, \ldots, f_n \in C_\alpha$, to możemy znaleźć liczbę $\alpha^{f_1,\ldots,f_n} < \omega_1$ oraz zbiór otwarty $G^{f_1,\ldots,f_n} \in \mathcal{U}$ takie, że $\Pi_{l=1}^n B(f_l, \alpha^{f_1,\ldots,f_n}) \subset G^{f_1,\ldots,f_n}$. Definiujemy $\theta(\alpha) = \sup\{\alpha^{f_1,\ldots,f_n} : f_1, \ldots, f_n \in C_\alpha\}$. Zauważmy, że liczba $\theta(\alpha)$ jest przeliczalna.

Definiujemy teraz $\alpha_0 = \omega$ i $\alpha_{m+1} = \max\{\theta(\alpha_m), \alpha_m + 1\}$. Ciąg $\alpha_m$ $(m \in \omega)$ ma własność, że dla każdego $m \in \omega$ oraz dla każdych funkcji $f_1, \ldots, f_n \in C_{\alpha_m}$ istnieje zbiór otwarty $G^{f_1,\ldots,f_n} \in \mathcal{U}$ taki, że $\Pi_{l=1}^n B(f_l, \alpha_{m+1}) \subset G^{f_1,\ldots,f_n}$. Kładziemy teraz $\alpha = \sup_{m\in\omega} \alpha_m$. Niech ciąg $(f_1, \ldots, f_n)$ będzie dowolnym elementem $E^n$ takim, że dla każdego $l \in \omega$, $1 \leq l \leq n$ zachodzi $f_l \neq \chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}}$. Wtedy $\mathrm{supp}(f_l) \cap \alpha$ jest zbiorem ograniczonym w zbiorze $\alpha$. Definiujemy funkcję $\widehat{f_l}$ jako iloczyn $f_l \cdot \chi_{[0;\alpha)}$ $(1 \leq l \leq n)$; funkcja $\widehat{f_l}$ $(1 \leq l \leq n)$ jest elementem przestrzeni $E$, a więc możemy ustalić liczbę $m \in \omega$ taką, że dla każdego $l$, $1 \leq l \leq n$ zbiór $\mathrm{supp}(\widehat{f_l})$ jest zawarty w zbiorze $\alpha_m$. Zgodnie z konstrukcją funkcji $\theta$ istnieje zbiór otwarty $G^{\widehat{f_1},\ldots,\widehat{f_n}} \in \mathcal{U}$ taki, że $\Pi_{l=1}^n B(\widehat{f_l}, \alpha) \subset G^{\widehat{f_1},\ldots,\widehat{f_n}})$. Co więcej, $B(f_l, \alpha) = B(\widehat{f_l}, \alpha)$, a zatem $\Pi_{l=1}^n B(f_l, \alpha) \subset G^{\widehat{f_1},\ldots,\widehat{f_n}}$.

Rodzina $\mathcal{G} = \{G^{g_1,\ldots,g_n} : g_l \in C_\alpha,\ 1 \leq l \leq n\} \subset \mathcal{U}$ stanowi otwarte, przeliczalne pokrycie przestrzeni

$$E^n \setminus \Big( \bigcup_{1\leq l\leq n} \{(g_1, \ldots, g_n) \in E^n : g_l = \chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}}\}\Big) \tag{8}$$

Jeśli $n = 1$ to jedynym elementem $E^n = E$, który być może nie jest pokryty przez $\mathcal{G}$, jest punkt $\chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}}$. Wnioskujemy stąd, że przestrzeń $E$ jest przestrzenią Lindelofa.

Posłużymy się indukcją, po to by wykazać, że $E^n$ jest przestrzenią Lindelofa dla $n > 1$. Załóżmy, że już wykazaliśmy, że przestrzeń $E^{n-1}$ jest przestrzenią Lindelofa ($n > 1$).

Zauważmy, że dla $n > 1$ zbiór $\{(g_1, \ldots, g_n) \in E^n : g_l = \chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}}\}$ jest homeomorficzny z przestrzenią $E^{n-1}$, a więc można go pokryć przeliczalnie wieloma elementami $\mathcal{U}$; $n$–krotne (por. równość (8)) zastosowanie przypuszczenia indukcyjnego pozwala z pokrycia $\mathcal{U}$ wybrać podpokrycie przeliczalne przestrzeni $\bigcup_{1\leq l\leq n}\{(g_1, \ldots, g_n) \in E^n : g_l = \chi_{\{s_n^\alpha\}_{n\in\omega}\cup\{\alpha\}}\}$. W połączeniu z wcześniej przeprowadzonym rozumowaniem otrzymujemy, że z pokrycia $\mathcal{U}$ można wybrać podpokrycie przeliczalne całej przestrzeni $E^n$, a tym samym, że przestrzeń $E^n$ jest przestrzenią Lindelofa.

*Uwaga* 6.5.1. Wystarczyłoby wykazać, że przestrzeń $E$ jest przestrzenią Lindelofa. Faktycznie, na mocy twierdzenia z pracy [53] (Corollary 4.2), iloczyn kartezjański $E^\omega$ jest przestrzenią Lindelofa o ile $E$ jest P–przestrzenią Lindelofa.

## 7. Metryczne grupy silnie o–ograniczone i o–ograniczone.

7.1. **Metryczne grupy silnie o–ograniczone.** Wykażemy, że w klasa metrycznych, abelowych, ośrodkowych grup silnie o–ograniczonych jest zamknięta ze względu na branie iloczynów kartezjańskich. W paragrafach 5.2 oraz 5.4 odnotowaliśmy, że przy dodatkowych założeniach teoriomnogościowych klasa metrycznych grup o–ograniczonych nie jest zamknięta na branie iloczynów kartezjańskich. Definicja gry $\Gamma$ i definicja grupy silnie o–ograniczonej są podane w paragrafie 6.2. Zacznijmy od prostej

*Uwaga* 7.1.1. Każda grupa $(G, d)$ $\aleph_0$–ograniczona (por. paragraf 5.3) i metryczna jest ośrodkowa. Istotnie, $G$ jeśli przestrzeń $G$ nie byłaby ośrodkowa, to moglibyśmy znaleźć liczbę $\epsilon > 0$ i nieprzeliczalny zbiór $A \subset G$ taki, że dla każdego $x, y \in A$, $x \neq y$ kula $K(x, \epsilon) \cap K(y, \epsilon) = \emptyset$. Zatem dla każdego zbioru przeliczalnego $D \subset G$ zachodziłoby $D + K(0_G, \frac{\epsilon}{2}) \neq G$. To daje sprzeczność z przypuszczeniem, że $G$ jest grupą $\aleph_0$–ograniczoną.

Wnioskujemy stąd, że każda metryczna grupa o–ograniczona, a tym bardziej silnie o–ograniczona, jest ośrodkowa.$\Box_{uwaga\ 7.1.1}$

Wykażemy teraz

**Twierdzenie 7.1.2.** *Jeśli $G$ jest grupą silnie o–ograniczoną, metryczną i abelową, to $G$ jest podgrupą pewnej metrycznej grupy $\sigma$–zwartej.*

*Uwaga* 7.1.3. Istnieją przykłady całkowicie regularnych grup silnie o–ograniczonych, które nie są podgrupami żadnej grupy $\sigma$–zwartej ([30, Example 3.1]).

*Dowód.* (twierdzenia 7.1.2) Niech $G$ będzie metryczną, ośrodkową i abelową grupą silnie o–ograniczoną. Zgodnie z [60, Theorem 2.3.5, str. 352–353], każdą grupę metryzowalną, można włożyć homeomorficznie w pewną abelową grupę zupełną, z zachowaniem struktury grupowej na $G$. Możemy zatem przypuszczać, że $G$ jest podgrupą grupy zupełnej $H$. Niech $d$ będzie ustaloną metryką niezmienniczą (tzn. dla $x, y, z \in G$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$) i zupełną na $H$ (por. [60, Theorem 2.3.5, str. 352–353]). Wykażemy, posługując się metodą podobną do użytej wcześniej w pracy [62], że istnieje $\sigma$–zwarta grupa $C \subset H$ taka, że $G \subset C$.

Przez $0 = 0_G = 0_H$ oznaczamy element neutralny w $G$, $H$. Niech $S$ będzie strategią wygrywającą dla gracza II. Dla $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ i $x \in G$ definiujemy $K(x, r) = \{y \in G :$

$d(x,y) < r\}$. Dla liczb naturalnych $n_0, \dots n_k \in \omega \setminus \{0\}$ definiujemy

$$F(n_0, \dots, n_k) = K(0, \frac{1}{n_k}) + S(K(0, \frac{1}{n_0}), \dots, K(0, \frac{1}{n_k})).$$

Dla $\tau \in (\omega \setminus \{0\})^m$ $(m \in \omega)$ definiujemy

$$C_\tau = \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} F(\tau(0), \dots, \tau(m-1), n).$$

Przypuśćmy, że istnieje element $x \in G$ taki, że $x \notin \bigcup_{\tau \in (\omega \setminus \{0\})^{<\omega}} C_\tau$. Wtedy przez indukcję można wybrać liczby naturalne $n_0, n_1, \dots, n_k > 0$ $(k \in \omega)$ takie, że dla każdego $k \in \omega$ zachodzi $x \notin F(n_0, \dots, n_k)$. To jednak daje sprzeczność z przypuszczeniem, że grupa $G$ jest silnie o–ograniczona, bowiem gracz II przegrywałby rozgrywkę

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | $K(0, \frac{1}{n_0})$ | | $K(0, \frac{1}{n_1})$ | | |
| | | | | | $\dots$ |
| II | | $S(K(0, \frac{1}{n_0}))$ | | $S(K(0, \frac{1}{n_0}), K(0, \frac{1}{n_1}))$ | |

Zauważmy, że zbiór $\mathrm{cl}_H(C_\tau)$ jest zbiorem zwartym, gdyż jest domkniętym podzbiorem zupełnej przestrzeni $H$ i jest *całkowicie ograniczony*, co znaczy, że dla każdego $n \in \omega \setminus \{0\}$ można go pokryć skończoną rodziną zbiorów o średnicach nie przekraczających $\frac{1}{n}$. Istotnie, $F(\tau(0), \dots, \tau(m-1), 2n) = \bigcup_{x \in D} K(x, \frac{1}{2n})$ dla pewnego skończonego zbioru $D \subset G$ i $\mathrm{cl}_H(C_\tau) \subset \mathrm{cl}_H(\bigcup_{x \in D} K(x, \frac{1}{2n}))$. Szukanymi zbiorami o średnicach nie przekraczających $\frac{1}{n}$ są domknięcia kul $\mathrm{cl}_H(K(x, \frac{1}{2n}))$ dla $x \in D$. To dowodzi, że zbiór $\mathrm{cl}_H(C_\tau)$ jest zwarty.

Zbiór $C = \bigcup_{\tau \in (\omega \setminus \{0\})^{<\omega}} C_\tau$ jest $\sigma$–zwarty. To oznacza, że grupa $G$ jest zawarta w grupie $\sigma$–zwartej wygenerowanej przez zbiór $C$. □

*Uwaga* 7.1.4. Przy dodatkowym założeniu Determinacji Analitycznej wynik ten otrzymał wcześniej T. Banakh w pracy [7, Theorem 4].

T. Banakh wykazał także w [7, Proposition 1], że można znaleźć grupę koanalityczną $C$, $G \subset C$. Nasze rozumowanie, w zakresie grup abelowych, odpowiada na pytanie z pracy [7].

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy

**Twierdzenie 7.1.5.** *Jeśli $G, H$ są abelowymi grupami metrycznymi, ośrodkowymi i silnie o–ograniczonymi, to $G \times H$ jest grupą silnie o–ograniczoną.*

*Dowód.* Zgodnie z twierdzeniem 7.1.2 istnieją grupy metryczne grupy $\sigma$–zwarte $G_1$, $H_1$ takie, że $G \subset G_1$ oraz $H \subset H_1$. Grupa $G \times H$ jest podgrupą grupy $\sigma$–zwartej $G_1 \times H_1$, a więc jest silnie o–ograniczona na mocy [30, Corollary 2.3]. □

7.2. **Determinacja gry $\Gamma$ w klasie grup metrycznych.** W rozdziale 6 wykazaliśmy, że istnieje grupa $G$, która jest o–ograniczona, ale nie jest silnie o–ograniczona. W tym paragrafie wykażemy, bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych, że istnieje metryczna, ośrodkowa grupa $G$, która jest o–ograniczona, ale która nie jest silnie o–ograniczona. Wydaje się, że tego rodzaju przykłady nie były znane wcześniej w literaturze. Co więcej, dla naszej metrycznej, ośrodkowej grupy $G$ gra $\Gamma(G)$ okaże się niezdeterminowana. To rozwiązuje [29, Problem 5].

Mówimy, że funkcja $f \in \omega^\omega$ ma *skończony nośnik*, jeśli zbiór $\{n \in \omega : f(n) \neq 0\}$ jest skończony. Podobne pojęcie pojawia się w rozdziale 6; inne pojęcie nośnika jest używane w paragrafie 3.4. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{Z}^\omega$ jest $\omega^\omega$*–monotoniczny*, jeśli dla każdej funkcji $f \in A$ istnieje funkcja niemalejąca $h \in A$ taka, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $|f(n)| \leq h(n)$. Wykażemy najpierw

**Lemat 7.2.1.** *Niech $G \subset \mathbb{Z}^\omega$ będzie grupą która jest zbiorem $\omega^\omega$–monotonicznym, i która zawiera wszystkie funkcje o skończonych nośnikach. Jeśli $G$ jest o–ograniczona, to gracz I nie ma strategii wygrywającej w $\Gamma(G)$.*

*Dowód.* Przypuśćmy, że gracz I ma strategię wygrywającą $S$. Niech $g \in \omega^\omega$ będzie dowolną funkcją rosnącą. Znajdziemy $v \in G$ takie, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $v(n) \geq g(n)$. Wykażemy w ten sposób, że grupa $G$ nie jest o–ograniczona (zob. fakt 5.1.2).

Dla liczb naturalnych $n, k \in \omega$ przez $K_n^k$ będziemy oznaczać zbiór skończony $\{x \in \mathbb{Z}^\omega : \forall_{l\in\omega}\ |x_l| \leq n,\ \forall_{l>k}\ x_l = 0\}$. Dla liczby $n \in \omega$, tak jak w paragrafach 5.2 i 5.4, przez $[n]$ będziemy oznaczać zbiór domknięto–otwarty $\{x \in \mathbb{Z}^\omega : \forall_{k\leq n}\ x_k = 0\}$.

Bez straty ogólności można przypuścić, że w strategii $S$ gracz I posługuje się wyłącznie bazowymi otoczeniami zera postaci $[n]$ dla $n \in \omega$.

Niech $[n_0]$ będzie pierwszym zagraniem gracza I, tak jak przewiduje strategia $S$. Rozegramy dwie partie zgodnie ze strategią $S$. Niech $[n_1] = S(K_{g(n_0)}^{n_0})$. Bez straty ogólności możemy przypuszczać, że $n_1 > n_0$. Niech $[n_2] = S(K_{g(n_1)}^{n_0})$. Dla pewnego $n_3 \in \omega$ zachodzi $[n_3] = S(K_{g(n_0)}^{n_0}, K_{g(n_2)}^{n_1})$ i dla pewnego $n_4 \in \omega$ zachodzi $[n_4] = S(K_{g(n_1)}^{n_0}, K_{g(n_3)}^{n_2})$. Dla $k$

nieparzystego, jeśli $n_l$ są już zdefiniowane dla $0 \leq l < k$, definiujemy

$$[n_k] = S(K^{n_0}_{g(n_0)}, K^{n_1}_{g(n_2)}, \dots, K^{n_{k-2}}_{g(n_{k-1})})$$

i

$$[n_{k+1}] = S(K^{n_0}_{g(n_1)}, K^{n_2}_{g(n_3)}, \dots, K^{n_{k-1}}_{g(n_k)}).$$

Rozgrywki wyglądają następująco

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I} & [n_0] & & [n_1] & & [n_3] \\ & & & & & \quad\dots \\ \mathrm{II} & & K^{n_0}_{g(n_0)} & & K^{n_1}_{g(n_2)} & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I} & [n_0] & & [n_2] & & [n_4] \\ & & & & & \quad\dots \\ \mathrm{II} & & K^{n_0}_{g(n_1)} & & K^{n_2}_{g(n_3)} & \end{array}$$

Zgodnie z definicją gry $\Gamma$, skoro $S$ jest strategią wygrywającą dla gracza I, to istnieją $x, y \in G$ takie, że

$$x \notin ([n_0] + K^{n_0}_{g(n_0)}) \cup \bigcup_{k\in\omega} ([n_{2k+1}] + K^{n_{2k+1}}_{g(n_{2k+2})}) \tag{9}$$

oraz

$$y \notin ([n_0] + K^{n_0}_{g(n_1)}) \cup \bigcup_{k>0, k\in\omega} ([n_{2k}] + K^{n_{2k}}_{g(n_{2k+1})}). \tag{10}$$

Niech $w, z \in G$ niemalejące i takie, że dla każdego $n \in \omega$ zachodzi $w(n) \geq |x(n)|$, $z(n) \geq |y(n)|$. Wtedy dla $k \in \omega$ zachodzi

$$w|[n_{2k+1}; n_{2k+2}] \geq g|[n_{2k+1}; n_{2k+2}] \tag{11}$$

i

$$z|[n_{2k}; n_{2k+1}] \geq g|[n_{2k}; n_{2k+1}]. \tag{12}$$

Istotnie, niech $k \in \omega$ i niech $l \in [n_{2k+1}; n_{2k+2}]$. Zgodnie z zależnością (9) istnieje $j \in [0; n_{2k+1}]$ takie, że $|x(j)| > g(n_{2k+2})$. Zauważmy, że $j \leq n_{2k+1} \leq l$. Wobec tego

$$w(l) \geq w(j) \geq |x(j)| > g(n_{2k+2}).$$

Podobne rozumowanie przekonuje, że zachodzi nierówność (12).

Dla każdego $l \geq n_0$ zachodzi $z(l) + w(l) \geq g(l)$; niech $u(l) = g(l)$ dla $l < n_0$, $u(l) = 0$ dla $l \geq n_0$; zgodnie z naszym założeniami, mamy $u \in G$. Zatem $z + w + u \geq g$. $\square$

*Uwaga* 7.2.2. Zanim przejdziemy do badania determinacji gry $\Gamma$, zdefiniujemy *grę Mengera* $\Gamma'$ (por. [63]), o własnościach zbliżonych do gry $\Gamma$. W naszej nowej grze $\Gamma'(G)$ gracz I zagrywa dowolne pokrycie $\mathcal{U}_n$ $(n \in \omega)$ przestrzeni $G$, natomiast zadaniem gracza II jest wybrać skończoną rodzinę $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ tak, by $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ było pokryciem $G$.

Gra $\Gamma'$ ma sens nie tylko dla grupy topologicznej $G$, ale także dla dowolnej przestrzeni topologicznej. Mówimy, że przestrzeń metryczna, ośrodkowa $G$ ma *własność Mengera*, jeśli dla każdego ciągu pokryć $\mathcal{U}_n$ $(n \in \omega)$ można znaleźć skończone podrodziny $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ takie, by $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ było pokryciem $G$. Zgodnie z [61, Theorem 13], przestrzeń metryczna, ośrodkowa $G$ ma własność Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy gracz I nie ma strategii wygrywającej w grze $\Gamma'(G)$. Jeśli $G$ jest dowolną grupą z własnością Mengera, to z definicji własności Mengera nietrudno jest wywnioskować, że $G$ jest grupą o–ograniczoną. Jeśli dla przestrzeni metrycznej $G$ gracz II ma strategie wygrywającą w grze $\Gamma'(G)$, to przestrzeń jest $\sigma$–zwarta ([72],[62]).

Klasy grup o–ograniczonych i silnie o–ograniczonych są zamknięte na branie podgrup ([30, Theorem 2.1]), natomiast klasa grup z własnością Mengera jest zamknięta na branie podgrup domkniętych i nietrudno jest podać przykład podgrupy grupy zwartej $\mathbb{Z}_2^\omega$, która nie ma własności Mengera; istotnie, jak wykazał Hurewicz (por. twierdzenie 2.7.11), podzbiory analityczne w $\mathbb{Z}_2^\omega$ mają własność Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy są $\sigma$–zwarte.

W przypadku gry $\Gamma'(G)$ można wskazać ([23, Theorem 4]), bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych, przestrzeń metryczną ośrodkową $G$, dla którego gra $\Gamma'(G)$ nie jest zdeterminowana (por. [62]) $\square_{uwaga\ 7.2.2}$

W pracy [29] (Problem 5) postawiony jest problem, czy bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych istnieje przykład grupy metrycznej $G$, dla której $\Gamma(G)$ nie jest zdeterminowana. W pracy [7] postawiony jest problem, czy bez dodatkowych założeń teoriomnogościowych w każdej grupie polskiej, nigdzie lokalnie zwartej, istnieje podgrupa niezdeterminowana.

Odpowiemy tu na [29, Problem 5], posługując się metodę dowodową zbliżoną do użytej w pracach [23, Theorem 4], [33, Theorem 5.1].

*Uwaga* 7.2.3. Zauważmy, że jeśli grupa $G$ jest generowana przez pewien zbiór $\omega^\omega$–monotoniczny $A$ to $G$ jest zbiorem $\omega^\omega$–monotonicznym. Zatem, jeśli $G \subset \mathbb{Z}^\omega$ jest grupą o–ograniczoną generowaną przez pewien zbiór $\omega^\omega$–monotoniczny i $G$ zawiera wszystkie funkcje o skończonych nośnikach, to na mocy lematu 7.2.1, gracz I nie ma strategii wygrywającej w grze $\Gamma(G)$ $\square_{uwaga\ 7.2.3}$

Przez $\mathcal{Q}$ oznaczamy zbiór złożony z tych $f \in \omega^\omega$, które są od pewnego miejsca stałe. Zauważmy, że zbiór $\mathcal{Q}$ jest przeliczalny. Jeśli zachodzi nierówność $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ to ustalamy zbiór $A \subset \omega^\omega$ mocy $\mathfrak{b}$, nieograniczony (por. paragraf 2.9) i złożony z funkcji niemalejących. Niech $G$ będzie grupą wygenerowaną w $\mathbb{Z}^\omega$ przez zbiór $A \cup \mathcal{Q}$. Grupa $G$ ma moc mniejszą, niż $\mathfrak{d}$, a zatem jest o–ograniczona na mocy naszych rozważań z paragrafu 5.3. Zbiór $A \cup \mathcal{Q}$ jest $\omega^\omega$–monotoniczny, grupa $G$ zawiera wszystkie funkcje o skończonych nośnikach, a więc na mocy uwagi 7.2.3, gracz I nie ma strategii wygrywającej w grze $\Gamma(G)$. Skoro zbiór $A$ jest nieograniczony, to grupa $G$ nie jest zawarta w żadnej grupie $\sigma$–zwartej w $\mathbb{Z}^\omega$ (zob. paragraf 2.9), a więc na mocy twierdzenia 7.1.2 grupa $G$ nie jest silnie o–ograniczona. Podsumowując, gra $\Gamma(G)$ nie jest zdeterminowana.

Jeśli $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}$ to przykładu grupy o–graniczonej, która nie jest zdeterminowana względem gry $\Gamma(G)$ dostarcza lemat 5.4.3 (por. uwaga 5.4.4); niech $F, G$ będą nie podobnymi do siebie ultrafiltrami. Żadna z grup $X_F$ i $X_G$ nie jest silnie o–ograniczona. Istotnie, na mocy twierdzenia 7.1.2, jeśli grupa $X_F$ lub grupa $X_G$ byłaby silnie o–ograniczona, to byłaby zawarta w pewnej grupie $\sigma$–zwartej. Wtedy jednak, na mocy [30, Theorem 5.3], iloczyn $X_F \times X_G$ byłby grupą o–ograniczoną. Grupy $X_F$, $X_G$ są generowane przez zbiory zbiory $A_F$, $A_G$, które są $\omega^\omega$–monotoniczne i które zawierają wszystkie funkcje o skończonych nośnikach (por. uwaga 5.4.1). Na mocy uwagi 7.2.3 wynika stąd, że gracz I nie ma strategii wygrywającej w grze $\Gamma(X_F)$.

*Uwaga* 7.2.4. Przy dodatkowym założeniu teoriomnogościowym wynikającym z aksjomatu Martina ($\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$), T. Banakh podał w pracy [7, Theorem 7] konstrukcję grupy $G$ dla której gra $\Gamma(G)$ nie jest zdeterminowana. Przy dodatkowym założeniu teoriomnogościowym $\diamondsuit$, konstrukcję grupy $G$, która jest P–przestrzenią Lindelofa i dla której gra $\Gamma(G)$ nie jest zdeterminowana, podano w pracy [29].

# Indeks

## Bibliografia


[1] A. Andretta, A. Marcone, *Pointwise convergence and the Wadge hierarchy*, Comment. Math. Univ. Carolinae **41** (2001), 159–172.

[2] A.V. Arkhangelskii, *On condensations of $C_p$–spaces onto compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1881–1883.

[3] A.V. Arkhangelskii, *Linear topological classification of spaces of continuous functions in the topology of pointwise convergence* (po rosyjsku), Mat. Sb. **181** (1990), no. 5, 705–718.

[4] A.V. Arkhangelskii, *Topological Function Spaces* (po rosyjsku), Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1989.

[5] A.V. Arkhangelskii, *Factorization theorems and function space: Stability and monolithicity*, Soviet Math. Dokl. **26** (1982), 177–181.

[6] J. Baars, J. de Groot, *On Topological and Linear Equivalence of the Function Spaces*, CWI Tract **86**, Amsterdam, 1992.

[7] T. Banakh, *On index of total boundedness of (strictly) o–bounded groups*, preprint.

[8] T. Banakh, A. Plichko, *On a problem of "Scottish Book" concerning condensations of metric spaces onto compacta*, Mat. Studii **8** (1997), 119-122.

[9] T. Bartoszyński, H. Judah, *Set Theory: On The Structure Of The Real Line*, A K Peters, Wellesley, **1995**.

[10] M. Bestvina, J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite–dimensional absolute retracts*, Michigan Math. Journal **33** (1986), 291–313.

[11] A. Blass, *Near coherence of filters, I: cofinal equivalence of models of artithmetic*, Notre Dame J. Formal Logic **27** (1986), 579–591.

[12] A. Blass, *Near coherence of filters, II: applications to operator ideals, the Stone–Cech remainder of a half line, order ideals of sequences, and slenderness of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), 557–581.

[13] A. Blass, *Applications of superperfect forcing and its relations*, Set Theory and its Applications, Lecture Notes in Math. **1401**, Springer, Berlin, **1989**.

[14] A. Blass, S. Shelah, *There may be $P_{\aleph_1}$– and $P_{\aleph_2}$–points and the Rudin–Kiesler ordering may be downward directed*, Ann. Pure Appl. Logic **33** (1987), 213–243.

[15] K. Ciesielski, R. Pol, *A weakly Lindelof function space $C(K)$ without any continuous injection into $c_0(\Gamma)$*, Bull. Pol. Acad. Sci. **32** (1984), 681–688.

[16] J.P.R. Christensen, *Topology and Borel Structure, North–Holand*, Amsterdam, **1974**.

[17] T. Dobrowolski, W. Marciszewski, *Classification of function spaces with the pointwise topology determined by a countable dense set*, Fund. Math. **148** (1995), 35–62.

[18] E.K. van Douwen, *The integers and topology*, rozdział 3 w Handbook of Set Theorethical Topology, red. K. Kunen i J.E. Vaughan, Elsevier, **1984**.

[19] R. Engelking, *Topologia Ogólna*, Warszawa, PWN, **1989**.

[20] I. Farah, S. Todorcevic, *Some Applications of the Method of Forcing*, Yenisei Series in Pure and Applied Mathematics, Yenisei, Moscow, **1995**.

[21] J.M. O'Farrell, *Construction of a Hurewicz metric space whose square is not a Hurewicz space*, Fund. Math. **127** (1986), 41–43.

[22] D. Fremlin, *Families of compacts sets and Tukey's orderings*, Atti. Sem. Math. Fis. Univ. Modena **39** (1991), 29–50.

[23] D. Fremlin, A. Miller, *On some properties of Hurewicz, Menger and Rotheberger*, Fund. Math. **129** (1988), 17–33.

[24] F. Galvin, *Indeterminacy of point–open games*, Bull. De L'Acad. Pol. Sci. **26**, 1978, 445–449.

[25] S.P. Gulko, *Spaces of continuous functions on ordinals and ultrafilters* (po rosyjsku), Mat. Zametki **47** (1990), no. 4, 26–34.

[26] S.P. Gulko, T.E. Khmyleva, *Compactness is not preserved by t–equivalence*, Mat. Zametki **39** (1986), 895–903, po rosyjsku.

[27] I. Guran, *On topological groups close to being Lindelof*, Soviet Math. Dokl. **23** (1981), 173–175.

[28] P. Habala, P. Hajek, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces I*, Matfyzpress **1996**, Praga.

[29] C. Hernandez, D. Robbie, M. Tkachenko, *Some properties of o–bounded and strictly o–bounded groups*, Appl. Gen. Topol. **1** (2000), 29–43.

[30] C. Hernandez, *Topological groups close to being $\sigma$–compact*, Top. Appl. **102** (2000), 101–111.

[31] G. Hjorth, *Continuous images of coanalytic sets*, Logic Colloqium 1998 (Prague), Lect. Notes Log. **13**, Assoc. of Symb. Logic, Urbana, USA **2000**, 226–237.

[32] T. Jech, *Set Theory*, Academic Press, New York, 1978.

[33] W. Just, A. W. Miller, M. Scheepers, P.J. Szeptycki, *The combinatorics of open covers II*, Top. Appl. **73** (1996), 241–266.

[34] A.S. Kechris, A. Louveau, W. H. Woodin, *The structure of $\sigma$–ideals of compacts sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 263–288.

[35] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer–Verlag, New York, 1994.

[36] A.S. Kechris *On the concept of $\mathbf{\Pi}^1_1$–completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 1811–1814.

[37] V. L. Klee, *Convex bodies and periodic homeomorhpisms in Hilbert spaces*, Trans. AMS **74** (1953), 10–43.

[38] A. Krawczyk, H. Michalewski, *An example of a topological group*, preprint UW, przyjęte do druku w Top. Appl.

[39] A. Krawczyk, H. Michalewski, *Linear metric spaces close to being sigma–compact*, preprint UW, złożone do druku.

[40] W. Kulpa, *On a problem of Banach*, Colloquium Math. **56** (1988), 255–261.

[41] K. Kuratowski, *Topology*, vol. I, New York, 1966.

[42] A. Louveau, J. Saint–Raymond, *Borel classes and closed games: Wadge–type results and Hurewicz–type results*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), 431–467.

[43] D. J. Lutzer, R.A. McCoy, *Category in function spaces*, Pacific J. Math. **90** (1980), 145–168.

[44] W. Marciszewski, J. van Mill, *An example of $t_p^*$–equivalent spaces which are not $t_p$–equivalent*, Top. and its Appl. **85** (1998), 281–285.

[45] W. Marciszewski, *A function space $C_p(X)$ without a condensation onto a $\sigma$–compact space*, preprint.

[46] W. Marciszewski, *A function space $C_p(X)$ not linearly homeomorphic to $C_p(X) \times \mathbb{R}$*, Fund. Math. **153** (1997), 125–140.

[47] K. Menger, *Einige Uberdeckungssatze der Punktmengenlehre*, Sitzungsberichte Abt. 2a Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorolgie und Mechanik **133**, Wiener Akademie, Wien (1924), 421–444.

[48] H. Michalewski, *Przestrzenie funkcji ciągłych i przestrzenie dziedzicznie Baire'a*, praca magisterska, UW, **1998**.

[49] H. Michalewski *An answer to a question of Arhangel'skii*, Comment. Math. Univ. Carolinae **42** (2001), 545–550.

[50] H. Michalewski *Condensations of projective spaces onto compacta*, złożone do druku.

[51] H. Mildenberg, *Groupwise dense families*, Arch. Math. Logic **40** (2001), 93–112.

[52] J. van Mill, *The Infinite Dimensional Topology of Function Spaces*, North–Holand, Amsterdam **2001**.

[53] N. Noble, *Products with closed projections II*, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971), 161–183.

[54] J. Oxtoby, *Cartesian products of Baire spaces*, Fund. Math. **49** (1961), 157–166.

[55] V. G. Pestov, *The coincidence of the dimensions dim of the $l$–equivalent topological spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **266** (1982), nr 3, 553-556 (po rosyjsku).

[56] R. Pol, *A function space C(X) which is weakly Lindelof but not weakly compactly generated*, Studia Math. **64** (1979), 279–285.

[57] R. Pol, *Note on decompositions of metric spaces II*, Fund. Math. **100** (1978), 129–143.

[58] R. Pol, *On metrizable $E$ with $C_p(E) \not\cong C_p(E) \times C_p(E)$*, Mathematika **42** (1995), 49–55.

[59] E.G. Pytkeev, *The upper bounds of topologies (po rosyjsku)*, Mat. Zametki **20** no. 4 (1976), 489–500.

[60] C. A. Rogers i inni, *Analytic Sets*, Academic Press, Londyn, **1980**.

[61] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers I: Ramsey theory*, Top. Appl. **69** (1996), 31–62.

[62] M. Scheepers, *A direct proof of a theorem of Telgarsky*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995) 3483–3485.

[63] M. Scheepers, *A topological space could have infinite successor point–open type*, Topology. Appl. **61** (1995), 95–99.

[64] M. Scheepers, *The length of some diagonalization games*, Arch. Math. Logic **38** (1999), 103–122.

[65] *The Scottish Book*, ed. R.D. Mauldin, Birkhauser, Boston, **1981**.

[66] Z. Semadeni, *Banach Spaces of Continuous Functions*, PWN Warszawa, **1971**.

[67] W. Sierpiński, *Problem 70*, Fund. Math. **26** (1936), p. 334.

[68] T.A. Slaman, *On a question of Sierpinski*, Fund. Math. **159** (1999), 153–159.

[69] A.H. Stone, *On $\sigma$–discreteness and Borel isomorphism*, Amer. J. Math. **85** (1963), 655–666.

[70] R. Telgarsky, *Spaces defined by topological games*, Fund. Math. **88** (1975), 193–223.

[71] R. Telgarsky, *Spaces defined by topological games, II*, Fund. Math. **116** (1983), 189–207.

[72] R. Telgarsky, *On games of Topsoe*, Math. Scand. **54** (1984), 170–176.

[73] M. Tkachenko, *Introduction to topological groups*, Topology Appl. **86** (1998), 179–231.

[74] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), 247–262.

[75] H. Toruńczyk, *A correction of two papers concerning Hilbert manifolds*, Fund. Math. **125** (1985), 89–93.