

Zadania z algebry liniowej, 28.05.2019

1. Zbadać, które z poniższych macierzy są kongruentne nad $\mathbf{R}$, a które nad $\mathbf{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Niech h będzie formą dwuliniową na przestrzeni R^4 adaną warunkiem

$$G(h; \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gdzie $\mathcal{A} = \{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$.

- a) Znaleźć $G(h; st)$.
 b) Dla $W_t = \text{lin}((1, 0, 0, 1), (0, 1, t, 0))$ znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $W_t^\perp$, w zależności od $t \in R$.

3. Znaleźć rząd i sygnaturę formy dwuliniowej h określonej na przestrzeni R^4 wzorem

$$\begin{aligned} h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \\ = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_2y_4 + x_4y_2 + x_4y_4. \end{aligned}$$

Jaki jest maksymalny wymiar podprzestrzeni $W \subset R^4$ takiej, że $h|_{W \times W} = 0$?

4. Znaleźć taką bazę prostopadłą $\mathcal{A}$ przestrzeni dwuliniowej (R^3, h) , gdzie $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 4x_1y_1 + x_1y_3 + 3x_2y_2 + x_3y_1 + 4x_3y_3$, że $\mathcal{A}$ jest też bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(R^3, \langle, \rangle_{st})$.

5. Niech V będzie przestrzenią liniową macierzy 2×2 nad ciałem R . Dla $A, B \in V$ zdefiniujmy $\psi(A, B) = \text{tr}(A \cdot B)$ (tr oznacza ślad macierzy).

- a. Udowodnić, że ψ jest dwuliniową formą symetryczną na przestrzeni V .
 b. Sprawdzić, czy ψ jest nieosobliwa. Jeśli tak jest to znaleźć dla ψ bazę prostopadłą.
 c. Sprawdzić, czy ψ jest iloczynem skalarnym.