

Zadania z algebry liniowej, 14.05.2019

1. Znaleźć odległość prostych $L_1 = (2, 2, 0) + \text{lin}(1, 0, 3)$ i $L_2 = (1, 0, 4) + \text{lin}(1, 0, 1)$ jako podprzestrzeni afinicznych w R^3

- a) ze standardowym iloczynem skalarnym,
- b) z iloczynem skalarnym zadany wzorem

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

2. W przestrzeni euklidesowej afinicznej $(R^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$ niech $f : R^3 \rightarrow R^3$ będzie obrotem wokół prostej $L = (1, 1, 1) + \text{lin}((1, 1, 0))$ o kąt $\pi/3$ zgodnie z orientacją a $W = T(L)^\perp$ zadana przez bazę $(1, -1, 0)$, $(-2, 2, 1)$ i niech $g : R^3 \rightarrow R^3$ będzie symetrią prostopadłą względem W . Znaleźć wzór na izometrię $g \circ f$.

3. W przestrzeni euklidesowej afinicznej $(R^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$ zbadać ile jest izometrii $f : R^3 \rightarrow R^3$ spełniających zadany warunek. Opisać każdą taką izometrię f podając jej wartości na wybranej bazie punktowej przestrzeni R^3 .

- a) $f((1, 3, 1)) = (3, 0, 2)$, $f(\text{af}((2, 2, 2), (5, 2, 5))) \subset \text{af}(((4, 1, 1), (6, 3, 1)))$,
- b) f zmienia orientację, $f((1, 1, 1)) = (2, 1, 1)$, $f((1, 0, 1)) = (1, 1, 1)$, $f((1, 1, 2)) = (2, 1, 2)$,
- c) $f((0, 0, 0)) = (2, 0, 1)$, $f'(\text{lin}((1, 0, 0), (1, 1, 1))) = \text{lin}((1, 0, 0), (1, 1, 1))$.

4. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową, $\dim(V) = n$. Załóżmy, że mamy dane dwa ciągi niezerowych i różnych od całej przestrzeni podprzestrzeni liniowych w V : $V_1, \dots, V_{n-1}$ oraz $W_1, \dots, W_{n-1}$ spełniające dla $i \neq j$ warunki $V_i \neq V_j$ oraz $W_i \neq W_j$. Niech ponadto $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{n-1}$ i $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots \subseteq W_{n-1}$. Policzyc ile jest izometrii liniowych $\varphi : V \rightarrow V$ spełniających $\varphi(V_i) \subset W_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, \dots, n-1$.

5. Znaleźć odległość podprzestrzeni afinicznych

$$H_1 : (0, 1, 0, 0) + \text{lin}((1, -1, 0, -1), (0, 1, 1, 1))$$

i

$$H_2 : (0, 1, 0, 2) + \text{lin}((2, -3, -1, -3), (3, -1, 2, -1))$$

zawartych w przestrzeni R^4 ze standardowym iloczynem skalarnym.