

### Zadania z algebry liniowej, 21.12.2018

**1.** Niech  $f : R^4 \rightarrow R$  będzie zadane wzorem  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 2x_2 + 3x_4$ . Znaleźć współrzędne funkcjonału  $f$  w bazie sprzężonej do  $(1, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1)$ .

**2.** Czy istnieje funkcjonał liniowy  $f \in (R^4)^*$ , który przyjmuje wartość 1 na wektorach  $(5, -1, 2, 0)$  i  $(0, 1, 2, 0)$  oraz wartość 0 na  $(1, 0, 0, 1)$  i  $(0, -1, 4, 0)$ ? Jeśli taki funkcjonał istnieje to proszę znaleźć jego współrzędne w bazie sprzężonej do standardowej.

**3.** Niech  $\varphi : R^3 \rightarrow R^4$  będzie zadane wzorem  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, 4x_2 - 5x_3, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$ . Znaleźć bazę jądra i obrazu przekształcenia sprzężonego  $\varphi^* : (R^4)^* \rightarrow (R^3)^*$  podając wzory funkcjonałów tworzących bazy obu przestrzeni.

**4.** Niech  $R^4 = V_1 \oplus V_2$  gdzie  $V_1 = \text{lin}((2, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 1))$  a  $V_2$  jest opisana układem równań

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$2x_1 - x_3 + x_4 = 0$$

Niech  $S$  będzie symetrią względem  $V_1$  wzdłuż  $V_2$  (tzn. jeśli  $\alpha \in R^4$  oraz  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  gdzie  $\alpha_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$  to  $S(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$ ). Niech  $f \in (R^4)^*$  będzie zadane w bazie standardowej wzorem  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4$ . Znaleźć wzór na  $S^*(f)$ .

**5.** Dla przekształcenia liniowego  $\varphi_s : R^2 \rightarrow R^4$  zadanego wzorem  $\varphi_s((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, sx_1 + 4x_2, x_1 + sx_2, 3x_1 + 6x_2)$  zbadać dla jakich  $s \in R$  przekształcenie  $\varphi_s^*$  jest:

- a) monomorfizmem?
- b) epimorfizmem?