

Zadania z algebry liniowej, 30.11.2018

1. Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\phi : R^4 \rightarrow R^4$ takie aby $\ker(\phi) = \text{lin}((2, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 0))$ oraz $\text{im}(\phi) = \text{lin}((2, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 0))$.

2. Załóżmy, że przekształcenie liniowe $\phi : R^4 \rightarrow R^4$ jest zadane wzorem zależnym od parametru $a \in R$:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4, x_1 + 3x_2 + ax_3, x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4).$$

- a) Znajdź wszystkie wartości parametru a takie, że $\dim(\ker(\phi)) = 1$.
- b) Dla $a = -1$ znaleźć bazę $\ker(\phi)$ i bazę $\text{im}(\phi)$.

3. Dla jakich $t \in R$ przekształcenie liniowe $\phi_t : R^3 \rightarrow R^4$, $\phi_t((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 3x_2 + tx_3)$ jest

- a) monomorfizmem
- b) epimorfizmem

4. W przestrzeni R^3 rozpatrzmy wektory $\alpha_1 = (1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (2, 3, 4)$, $\alpha_3 = (1, 1, 5)$, $\alpha_4 = (5, 7, 13)$.

- a) Znaleźć wzór na takie przekształcenie liniowe $\varphi : R^3 \rightarrow R^4$, że $\varphi(\alpha_1) = (0, 1, 1, 3)$, $\varphi(\alpha_2) = (1, 1, 2, 0)$, $\varphi(\alpha_3) = (3, 2, 1, 1)$.
- b) Czy istnieje takie przekształcenie liniowe $\varphi : R^3 \rightarrow R^4$, że $\varphi(\alpha_2) = (0, 1, 1, 3)$, $\varphi(\alpha_3) = (1, 1, 2, 0)$, $\varphi(\alpha_4) = (3, 2, 1, 1)$? Uzasadnij odpowiedź.

5. Niech $\phi : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, takim że $\phi \circ \phi = \phi$. Udowodnić, że istnieją podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset V$ takie, że $V = V_1 \oplus V_2$ oraz jeśli $\alpha \in V$ zapisuje się jako suma $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_i \in V_i$ dla $i = 1, 2$, to $\phi(\alpha) = \alpha_1$. (W takiej sytuacji mówimy, że ϕ jest rzutem na V_1 wzdłuż V_2 .)