Zadania na egzamin

Wersja 3 czerwiec A.D. 2011

1) Niech $Q \subset \mathbf{P}^n$ będzie kwadryką. Obliczyć objętość hiperpowierzchni $X \subset Q$ opisanej we współrzednych z $\mathbf{P}^n$ równaniem stopnia d.

2) Niech X będzie rozmaitością z metryką Hermitowską. Czy forma ω oraz operator I determinuje iloczyn skalarny? Czy za formę ω można przyjąć dowolną niezdegenerowaną 2-formę?

3) Niech X będzie rozmaitością z metryką Hermitowską. Jak z formy ω i iloczynu skalarnego odtworzyć strukturę zespoloną I.

4) Niech X będzie rozmaitością Kählerowską. Czy operator L, d i d^* działający na $A^k(X)$ determinuje struktureę zespoloną I?

5) Sprawdzić, że $*^2\omega = (-1)^{k(n-k)}\eta$ dla $\eta \in A^k(M)$.

6) Pokazać, że $*\mathcal{H} = \mathcal{H}$ na rozmaitości riemannowskiej niekoniecznie zwartej.

7) Pokazać, że forma Fubini-Study na $\mathbf{P}^n$ jest harmoniczna ze względu na $U(n+1)$-niezmienniczą metrykę riemannnowską.

8) Na powierzchni abelowej $\mathbf{C}^2/\Lambda$ (topologicznego torusa $(S^1)^4$) z płaską metryką znaleźć bazę przestrzeni harmonicznych form prymitywnych P^{pq} dla wszystkich p i q.

9) Dla przestrzeni $W = \mathbf{C}^n$ znaleźć wymiary przestrzeni prymitywnych $P^{pq} \subset \bigwedge^k W^*_{\mathbf{C}}$.

10) Niech W będzie przestrzenią liniową z iloczynem hermitowskim. Pokazać, że rozkład $\bigwedge^* W^*_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{p,q,k} L^k P^{pq}$ jest ortogonalny.

11) Zadanie o reprezentacjach sl_2. Rozłożyć produkt tensorowy $\bigwedge^2 S_k(\mathbf{C}^2)$ na reprezentacje nierozkładalne. Dla $k = 2$ podać wektory najwyższej wagi generyjące podreprezentacje.

12) Sprawdzić, że $\partial^* = - * \overline{\partial} *$ oraz $\overline{\partial}^* = - * \partial *$.

13) Sprawdzić prostopadłości składników w rozkładzie Hodge'a dla ∂ i dla $\overline{\partial}$.

14) Sprawdzić, że superkomutator w algebrze łącznej z gradacją spełnia super-formułę Leibniza.

15) Znaleźć sygnaturę grassmanianu $Grass_k(\mathbf{C}^n)$.

16) Niech $X \subset M$ będzie niepustą podrozmaitością zespoloną rozmaitości kählerowskiej. Wskazać klasę kohomologii $x \in H^{2\dim X}(M)$ taką, że $x \cup i^*[X]$ jest różne od zera.

17) Dane dwie abstrakcyjne struktury Hodge'a (tzn przestrzenie wektorowe nad $\mathbf{Q}$ z filtracją w kompleksyfikacji) (V_i, F_i^*) wagi k_i (gdzie $i = 1, 2$). Niech $f : V_1 \to V_2$ będzie przekształceniem liniowym, takim, że $f_{\mathbf{C}} : V_1 \otimes \mathbf{C} \to V_1 \otimes \mathbf{C}$ ściśle zachowuje filtrację, czyli

$$f(F^p(V_1 \otimes \mathbf{C})) = F^p(V_2 \otimes \mathbf{C}) \cap f(V_1 \otimes \mathbf{C}).$$

Pokazać, że jeśli $k_1 \neq k_2$, to $f = 0$.

18) Opisać strukturę Hodge'a w kohomologiach powierzchni K3. (To takie powierzchnie, których wiązka $\Lambda^2 TX$ jest trywialna i X jest jednospójna.) Trzeba użyć twierdzenie Hirzebrucha o sygnaturze, formułę

Noether i formułę Wu, więc jest to zadanie na później [Barth-Hulek-Chris-Van de Ven, Compact complex surfaces, §VIII.3].

19) Niech $X \subset \mathbf{CP}^2$ będzie zadane wzorem $z_0 z_3^2 = z_1^3 + z_1^2 z_0$. (Parametryzacja $[s^3 : s(t^2 - t^2) : t(t^2 - s^2)]$.) Przedstawić X jako push-out diagramu rozmaitości gładkich i prześledzić jak wygąda ciąg dokładny obliczający kohomologie X z punktu widzenia teorii Hodge'a.

20) ? Zbadać ciąg Frolichera dla powierzchni Hopfa $\mathbf{C}^2/e^{\mathbf{Z}}$.

21) Opisać filtrację wagową w kohomologiach $X = \mathbf{P}^2 - (E_1 \cup E_2)$, gdzie E_1 i E_2 są krzywymi eliptycznymi przecinającymi się transwersalnie.

22) Niech E będzie krzywą eliptyczną, $e \in E$ oraz $X = (E - \{e\}) \times (E - \{e\}) -$(przekątna). Opisać filtrację wagową w kohomologiach X.

23) Niech E będzie krzywą eliptyczną. (Pamiętajmy, że E ma strukturę grupy abelowej.) $X = \{(e, f) \in E^2 : e \neq f \text{ i } e \neq -f\}$. Opisać filtrację wagową w kohomologiach X.

24) Znaleźć filtrację wagową dla $X = \mathbf{P}^3 -$(suma transwersalnie przecinających się 5-ciu hiperpłaszczyzn).

25) Sprawdzić, że $X^{\#\#} = X$ dla obrazu zanurzenia Veronese: $\mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^3$

$$[s_0 : s_1] \mapsto [s_0^3 : s_0^2 s_1 : s_0 s_1^2 : s_1^3]$$

26) Znając rozmaitość dualną $X^{\#}$ dla $X \subset \mathbf{P}^n$ wyznaczyć $X^{\#}$ dla X zanurzonego w $\mathbf{P}^{n+1}$.

27) Zrobić film o monodromii dla osobliwości kwadratowej $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$, w którym można będzie prześledzić ewolucję cykli na włóknie Milnora.

28) Niech X będzie obrazem zanurzenia Veronese $\mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}(Sym^3 \mathbf{C}^3)$. Opisać pęk Lefschetza dla X, znaleźć cykle znikające i nezmeinnicze. (?)Opisać monodromię.

29) Niech X będzie rozmaitością Kählerowską, a $E \to X$ wiązką holomorficzn'a. Wykazać, że na $\mathbf{P}(E)$ można dobrać metrykę Kählerowską.

30) Wyrazić sygnaturę powierzchni za pomocą c_1^2 i c_2. Dla powierzchni stopnia d w $\mathbf{P}^3$ obliczyć χ_y-genus oraz liczby Hodge'a. h^{pq}. (Wsk. Łatwe twierdzenie Lefschetza.)

31) Dla powierzchni mamy $12|(c_2 + c_1^2)$. Czy dla rozmaitości wymiaru 3 dostajemy jakąś nietrywialną informację o podzielności liczb Cherna? (Wsk: wypisać wzór na χ_y.)

3 czerwiec A.D. 2011