Zadania z Ziemią w treści
(tematy na lekcje, kółka matematyczne, pogadanki, itp.)

Michał Szurek

W niniejszym artykule podaję kilka zadań, których treścią jest... Ziemia. Niektóre z nich są bardzo znane, ale warto je przypomnieć.

W dobrym przybliżeniu Ziemia jest kulą – bryłą o nieskomplikowanej, lecz interesującej geometrii. Niektóre, nawet dobrze znane właściwości geometryczne kształtu kulistego wciąż jednak nas zaskakują. Hugo Steinhaus pisał, że glob ziemski jest „niepraktycznie zbudowany". To prawda, ale dzięki temu matematycy mają co robić, choćby i wymyślać łamigłówki takie jak ta, powszechnie znana:

Zadanie 1. Wyszedłem z namiotu, poszedłem 1 km na południe, potem 1 kilometr na zachód. Idąc teraz stale na północ wróciłem do punktu wyjścia i ku swojemu przerażeniu zauważyłem, że niedźwiedź wyjadł mi wszystkie zapasy żywności. Jakiego koloru był ten niedźwiedź?

Przypomnijmy rozmiary Ziemi. Będziemy przyjmować, że jest ona kulą o promieniu 6371 km i obwodzie 40000 km. Dane te są „trochę sprzeczne", bo $2\pi 6371 \approx 40030{,}1736...$. Jeśli przypomnimy sobie o tym, że Ziemia jest spłaszczona na biegunach, to będziemy mieli: promień równikowy 6378,160 km, biegunowy 6356,775 km, spłaszczenie 0,003353. Tylko niektóre z poniższych zadań dadzą się łatwo rozwiązać, jeśli będziemy uwzględniać to spłaszczenie. Z podręcznika do klasy III gimnazjum, wyd. GWO przepisujemy

Zadanie 2 . Oblicz jaką powierzchnię miałaby kula ziemska, gdyby rzeczywiście była kulą o promieniu 6371 km. Porównaj otrzymany wynik z rzeczywistą powierzchnią Ziemi, równą 510,066 mln km^2.

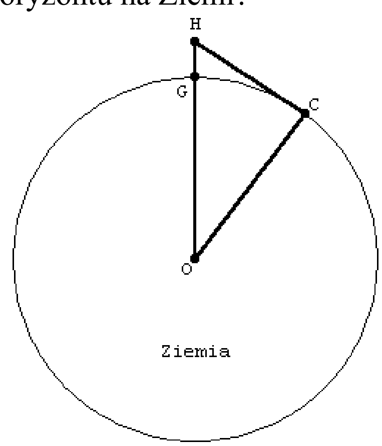
Wiemy, że bieguny na Ziemi mają szerokość geograficzną 90 stopni, ale nie mają żadnej długości geograficznej. Południki zbliżają się do siebie i schodzą się w jeden punkt – właśnie biegun. Równoleżniki mają różną długość (zawsze $2\pi r$, ale im bliżej bieguna, tym mniejsze jest r). Najdłuższy jest równik, a te równoleżniki, które opasują biegun bliziutko, są króciutkie, nawet 1 cm, nawet 1 mm, nawet 0,0001 mm.

Zadanie 3. Obliczyć długość równoleżnika o szerokości geograficznej α . Który z równoleżników jest o połowę krótszy niż równik ? Jaką długość ma równoleżnik przechodzący przez Twoją miejscowość? Ile km jest z Twojej miejscowości do bieguna północnego? Do bieguna południowego?
Rozwiązanie. Bez trudu obliczamy promień okręgu będącego takim równoleżnikiem:, gdzie R jest promieniem Ziemi, zatem długością równoleżnika jest $2\pi\ R \cos \alpha$. O połowę krótszy niż równik jest równoleżnik 60^o . Rozstrzygnięcie pozostałych pytań zostawiamy Czytelnikom.

Zadanie 4. Z lotniska w Balicach wystartował samolot. Poleciał 222 km na północ, potem 222 km na wschód, 222 km na południe i 222 km na zachód.. Gdzie wylądował?

W tym, punkcie, z którego wystartował? Oczywiście, że .... nie. Wskazówka: na wschód i zachód lecimy wzdłuż równoleżników, które mają zmienną długość.... Do rozwiązania zadania potrzebne są nam następujące dane: szerokość geograficzna lotniska w Balicach. Przyjmijmy $\phi = 50$ stopni (naprawdę jest to kilkanaście sekund kątowych więcej). Pamiętamy, że jeden stopień szerokości geograficznej na równiku jest równy 111 km. Przyjmiemy, że Ziemia jest kulą, a zatem jeden stopień na południku jest też równy 111 km, a więc 222 kilometrów południka to 2 stopnie.
Musimy znać długość d_{50} równoleżnika 50^0 oraz długość d_{52} równoleżnika 52^0. Mamy $d_{50} = 2\pi R \cos\phi$, gdzie $\phi = 50^0$, a R jest promieniem Ziemi, $R = 6371$ km, natomiast $d_{52} = 2\pi R \cos 52^0$. Zatem $d_{50} = 25731$ km. Jeden stopień na tej szerokości to $\frac{25731}{360} = 71{,}5$ kilometra. Natomiast $d_{52} = 24645$ km, więc jeden stopień na tej szerokości to 68,5 km. Samolot poleciał zatem 2 stopnie na północ. Znalazł się na 52 równoleżniku (z mapy możemy odczytać, że to okolice Łowicza), potem $\frac{222}{68{,}5} = 3{,}24$ stopnia na wschód (trochę na płn.-zach. Od Białej Podlaskiej) i 2 stopnie na południe (wtedy znalazł się między Jarosławem i Lubaczowem). Był teraz 3,24 stopnia od Krakowa, czyli $3{,}24 \cdot 71{,}5 = 231{,}66$ kilometrów. Po przeleceniu 222 kilometrów w kierunku zachodnim znalazł się zatem o prawie 10 km na wschód od Balic. Jeśli lądował, to gdzieś na polu pod Batowicami....

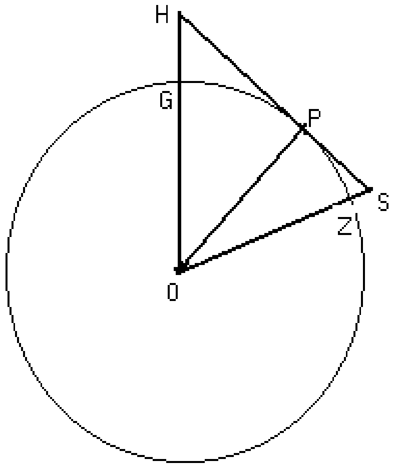
Zadanie. Ile jest równy promień horyzontu na Ziemi?



Odpowiedź zależy oczywiście od wysokości patrzącego. Przyjmijmy, że ma on oczy na wysokości h metrów, w punkcie H. Niech R będzie promieniem Ziemi, O – środkiem Ziemi, C odległością horyzontu. Z trójkąta prostokątnego OCH mamy $HC^2 = OH^2 - OC^2$, czyli $HC^2 = (R + h)^2 - R^2 = 2Rh + h^2$. Jeśli np. $h = 1{,}5$, to $HC = \sqrt{2 \cdot 6371000 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2} = 4371{,}8$. Ale dwumetrowy mężczyzna, mający oczy na wysokości 1,90 cm widzi o 550 metrów dalej. Dla niego horyzont jest odległy o 4920 metrów. Jeżeli wzniesiemy się na 10 kilometrów nad równinę, to nasz promień widzenia będzie już znaczny, około 357 kilometrów.

Zadanie: Wszyscy wiemy, że przy dobrej pogodzie z Krakowa widać Tatry. Wyliczmy, na jaką wysokość trzeba się wzbić nad Gdańsk, żeby zobaczyć człowieka, stojącego na szczycie Świnicy (2301 m). Słowo „zobaczyć” jest tu użyte w nieco teoretycznym znaczeniu – musielibyśmy mieć bardzo dobrą lornetkę....

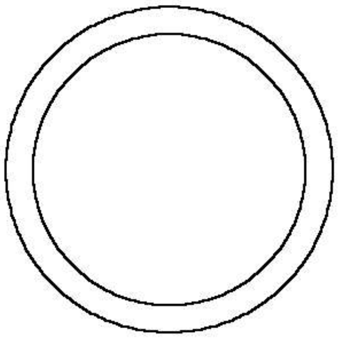
Na rysunku poniżej punkt G to Gdańsk, S – Świnica (2301 metrów). Przyjmujemy, że Gdańsk leży na poziomie morza i że odległość „w poziomie” między Gdańskiem a Świnicą jest równa 575 km. Chcemy wyliczyć długość odcinka GH. Przyjmiemy, że długość okręgu koła wielkiego przechodzącego przez Gdańsk i Świnicę jest równa 40000 kilometrów. Kąt środkowy GOZ na rysunku poniżej ma zatem $\frac{575}{40000} \cdot 2\pi \approx 0{,}09032079$ radianów. Kąty OPH i OPS są proste, zatem



$\cos\angle POS = \frac{OP}{OS} = \frac{6371}{6373{,}301} \approx 0{,}99963896$. Wyznaczamy stąd (za pomocą kalkulatora) że kąt POS ma 0,0268722579 radianów, zatem kąt HOP ma 0,0634485308 radianów. Wyliczamy stąd $OH = \frac{OP}{\cos\angle HOP} = \frac{6371}{0.9979878} \approx 6883{,}85$, czyli GH = 12,85 kilometra. Już z niespełna 13 kilometrów znad Gdańska widać Tatry....

Nie trzeba być matematykiem, żeby rozumieć, że sfera ma stałą krzywiznę: każdy jej kawałek możemy w dowolny sposób przyłożyć w innym miejscu i będzie pasował, nawet bez wyginania. To jedyna w swoim rodzaju własność powierzchni sferycznej. Matematycy znają wiele powierzchni, którym – może trochę wbrew intuicji – przypisują zerową krzywiznę. To takie powierzchnie, które można rozprostować tak, by były zupełnie płaskie. Taką jest na przykład powierzchnia walca. Ze sfera nie da się tego zrobić i dlatego każda mapa musi Ziemię zniekształcać: albo zachowuje kąty, albo pola, albo tylko niektóre odległości – a najczęściej niczego dokładnie nie odwzorowuje. Bo nie może. Żadnego obszaru sferycznego nie można położyć na płaszczyźnie (ściślej: odwzorować izometrycznie w płaszczyznę). Sposób mierzenia krzywizny powierzchni odkrył około 1830 roku Carl Friedrich Gauss, już przez swoich współczesnych zwany „księciem matematyków”. Miarą krzywizny powierzchni w punkcie jest iloczyn największej i najmniejszej krzywizny linii przechodzących przez ten punkt. Krzywiznę linii mierzymy jako odwrotność promienia okręgu ściśle stycznego; nie będziemy tu przypominać szczegółów. Twierdzenie Gaussa mówi, że powierzchnię można bez deformacji rozprostować, by była płaska wtedy i tylko wtedy, gdy jej krzywizna jest równa zero. Ponieważ sfera nie ma zerowej krzywizny (przez każdy punkt przechodzą okręgi o tym samym promieniu), zatem istotnie nie można jej rozprostować na płaszczyźnie. Walec ma krzywiznę zerową i dlatego powierzchnię walcową można wiernie odwzorować na płaszczyznę.

Zadanie 6 , również bardzo znane, jest takie, że w rozwiązanie trudno uwierzyć, nawet, gdy wszystkie rachunki sprawdzi się dokładnie. Wyobraźmy sobie, że Ziemia jest wzdłuż równika opasana szczelnie drutem. Zwiększamy długość drutu o 10 metrów. Jak dalece będzie teraz ów drut odstawać od powierzchni?



Pierwszym odruchem jest pomyśleć, że drut ten musi odstawać na drobny ułamek milimetra, czym jest 10 metrów wobec czterdziestu tysięcy kilometrów? Przeprowadźmy stosowne obliczenia. Równik ma długość 40000 km czyli 40000000 metrów. Jeżeli promień Ziemi oznaczymy przez R , to mamy zależność

$$2\pi R = 40000$$

gdzie R jest wyrażone w kilometrach. Dodajmy do równika tylko 10 metrów i oznaczmy promień tak otrzymanego okręgu przez R_1 . Mamy więc zależność:

$$2\pi R_1 = 40000 + 0{,}01$$

bo 10 metrów to jedna setna kilometra. Wyznaczamy stąd

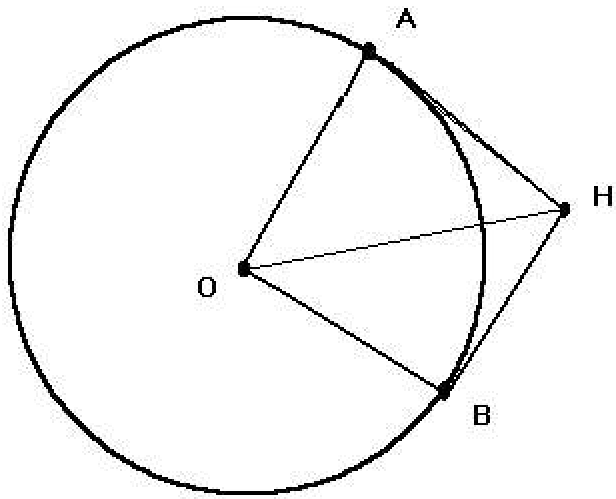
$$R_1 = \frac{40000 + 0{,}01}{2\pi} = \frac{40000}{2\pi} + \frac{0{,}01}{2\pi} \ .$$

Drut będzie odstawać od powierzchni Ziemi o $\frac{0{,}01}{2\pi}$ kilometra, czyli $\frac{10}{2\pi}$ metrów. Po obliczeniach otrzymamy: 1 m 59 centymetrów. Nikt, kto nie przeprowadził stosownych rachunków, nie uwierzy w to. Co więcej, ten sam wynik otrzymamy gdy o 10 metrów zwiększymy długość drutu, hipotetycznie opasującego Marsa, Jowisza, Saturna ... oraz pomarańczę. Zawsze zwiększenie długości obwodu o 10 metrów powoduje zwiększenie promienia o 159 cm. Jest to taka sama stała liczba, jak i sama liczba π .
Możemy ująć wynik naszego zadania tak: jeżeli osoba, która ma nos na wysokości 1 metr 59 centymetrów obejdzie Ziemię dookoła, to jej nos przebędzie drogę o 10 metrów dłuższą niż nogi. Dokładnie tak samo będzie na Księżycu, Marsie i Saturnie ... choć spacer po Saturnie dostarczyłby nam o wiele więcej emocji niż te, które wyniknęły z zadania.

Zadanie 7. Kulę taką jak Ziemia opasujemy drutem miedzianym. Wyobraźmy sobie teraz, że następuje ochłodzenie klimatu: temperatura spada o 10 stopni. Drut się trochę kurczy i wpija w powierzchnię planety. Na jak głęboko?
Do rozwiązania tego zadania musimy znać współczynnik rozszerzalności cieplnej drutu miedzianego. Możemy przyjąć, że przy ochłodzeniu o 10 stopni drut kurczy się o 10 cm na

kilometrze. Zatem „ubędzie" 400000 cm drutu; czyli 4 kilometry! Promień koła o obwodzie 40000 km jest równy 40000/6,28 = 6366,20 km. Promień koła o obwodzie 39960 km to 39994/6,28 = 6365,24 km. Drut wpije się w Ziemię na prawie kilometr!

Zadanie 8. Wyobraźmy sobie, że po opasaniu Ziemi sznurkiem dowiązaliśmy jeszcze dwa metry do sznurka i naciągnęliśmy sznurek, tak, by utworzył się „daszek" *ABH* (p. rysunek). Jaka będzie wysokość daszka? Czy przejdzie pod nim mysz?



Zadanie to jest nieco trudniejsze; musimy korzystać ze szkolnej geometrii i kalkulatora. Odcinki *AH* i *BH* są styczne do okręgu. Wiemy poza tym, że długość łuku *AB* jest o 2 metry mniejsza niż suma odcinków *AH* i *BH.* Oznaczmy kąt środkowy *AOH* przez α . Wtedy długość łuku *AB* jest równa $2 R \alpha$, gdzie r jest promieniem Ziemi. Długość odcinka *OH* wyznaczymy korzystając ze szkolnych zależności trygonometrycznych:

$$AO/OH = \cos \alpha ,$$

czyli

$$OH = AO/\cos \alpha = R/\cos \alpha.$$

Pozostaje wyznaczyć kąt α i jest to najtrudniejsza część zadania, bowiem równanie na α okazuje się być proste ... i bardzo trudne. Mamy $AH = r \operatorname{tg} \alpha$, zatem α jest takim kątem, że

$$r \operatorname{tg} \alpha - r \alpha = 1$$

a zatem

$$\operatorname{tg} \alpha - \alpha = 1/6371000 .$$

Takie równanie jest tzw. równaniem przestępnym. Wiele kalkulatorów (np. Texas Instruments, Casio) ma wbudowany „solver" czy „rozwiązywacz" równań. Ale nawet za pomocą zwykłego kalkulatora można metodą prób i błędów (czy, jak kto woli, kolejnych przybliżeń) wyznaczyć przybliżone rozwiązanie. Należy tylko rachować z dużą dokładnością i dochodzić do rozwiązania stopniowo. Jeśli mamy do dyspozycji kalkulator programowany, albo posługujemy się językiem programowania (C, Basic, TurboPascal, ...) , to możemy po prostu wziąć „na oko" $\alpha = 0{,}01$; dla takiego kąta na pewno $\operatorname{tg} \alpha - \alpha > 1/6371000$. Odejmując np. po 0,001 szukamy punktu w którym $\operatorname{tg} \alpha - \alpha$ spadnie po raz pierwszy poniżej 1/6371000. Takim punktem jest 0,777, zatem dla $\alpha = 0{,}778$ mamy jeszcze $\operatorname{tg} \alpha - \alpha > 0$. Następnie, dokładniejsze rozwiązanie otrzymujemy

poprawiając dokładność już znalezionego. Niestety, obliczenia wykonujemy tu na bardzo małych liczbach i kalkulatory nie dadzą dobrej dokładności. Nie działa też (jest za mało dokładny) excelowy „solver” Wyjątkiem jest właśnie „solver” w kalkulatorach Texas Instruments.
W języku programu Mathematica możemy napisać prymitywny program:

```
     Timing [ alfa = 0.00778; While[N[Tan[alfa]-alfa, 50] > N
[1/6371000,50],
     alfa = alfa-0.00000000001];
     Print[alfa] ]
```

„Bierze“ on wartość początkową 0,00778 i odejmuje po 0,00000000001 aż znajdzie rozwiązanie, a wszystko oblicza z dokłądnością do 50 cyfr po przecinku. Widoczna tam instrukcja Timing to pomiar czasu, ile zajmnie komputerowi dojście do rozwiązania. Mój komputer odpowiedział

```
     0.00777979
     {3.36 Second, Null}
```

czyli że w 3,36 sekundy znalazł rozwiązanie, którym jest

$$\alpha = 0{,}00777979 \text{ radianów, czyli } 0{,}44575 \text{ stopnia,}$$

skąd już obliczamy łatwo wysokość daszka:

$$h = OH - R = R/cos\ \alpha - R = 192{,}8$$

metra. Jest to jeszcze bardziej niewiarygodna odpowiedź: dodanie metra do obwodu Ziemi spowoduje, że w odstępie między powierzchnią Ziemi a naciągniętym sznurkiem zmieści się nie tylko mysz, słoń i żyrafa, ale nawet całkiem duży budynek! Trudno w to uwierzyć, ale rachunki są nieubłagane...

Zdajmy sobie jednak sprawę, że takie opasanie całej planety sznurkiem może być naprawdę urzeczywistnione w... zadaniu matematycznym i całe zadanie jest wobec tego uroczą... fantazją matematyka. Zadanie następne jest już .... bardzo poważne.

Zadanie 9. Oto do Ziemi zbliża się Planetoida Zagłady. Zderzenie spowoduje katastrofę. Zawezwani na pomoc kosmici z galaktyki PQX12 postanowili odholować Ziemię w bezpieczne miejsce. W tym celu postanowili założyć na Ziemię opaskę z mocnej, kosmicznej liny jak na rysunku : wzdłuż dwóch równoleżników (o szerokości północnej i południowej α) i czterech łuków południków między linami równoleżnikowymi.
Liny będą wykonane z bardzo wartościowego, „kosmicznego” materiału i zostaną potem na Ziemi. Zagrożenie zagrożeniem, ale postanowiliśmy jak najwięcej skorzystać i wskazać Kosmitom taki sposób założenia lin, żeby ich łączna długość była jak największa. Na jakiej szerokości geograficznej (północnej i południowej) należy je założyć?

Rozwiązanie jest już trudne. Młodzi Czytelnicy jeszcze je zrozumieją. Za rok będziemy w szkole uczyć matematyki sprowadzonej do banalnych obliczeń, a wysiłek uczniów pójdzie na to, by dostosować się do formalnych wymagań nowych matur. Ostatnia szansa, by zaprezentować coś z matematyki, jakiej nauczaliśmy przez ostatnie 35 lat! Oznaczmy promień Ziemi przez R. Wówczas promień okręgu będącego równoleżnikiem o szerokości geograficznej R jest równy R cos α, zatem długość takiego równoleżnika równa jest $2\pi R \cos\alpha$. Długość południka od równika do przecięcia się takim równoleżnikiem jest równa αR, gdzie α jest miarą łukową kąta odpowiadającego danej szerokości geograficznej. Łączna długość „opaski" jest równa

$$4\pi R\cos\alpha + 8\alpha R = 4R(\pi\cos\alpha + 2\alpha).$$

Rozpatrzmy funkcję f zmiennej $\alpha \in \langle 0; \pi/2\rangle$ określoną wzorem

$$f(\alpha) = \pi\cos\alpha + 2\alpha$$

Jest to funkcja różniczkowalna a jej pochodną jest $f'(\alpha) = -\pi\sin\alpha + 2$. Miejscem zerowym pochodnej jest taki kąt α, dla którego $\sin\alpha = 2/\pi \approx 0{,}63662$. Za pomocą kalkulatora znajdujemy, że kąt ten jest równy w przybliżeniu 0,690107 radianów, czyli około $39^0 32'$. Funkcja f ma w tym punkcie maksimum lokalne, równe w przybliżeniu

$$\pi\cos 39^0 32' + 2\cdot 0{,}690107 \approx 3{,}80294$$

Wartościami funkcji f na końcach przedziału określoności są

$$f(0) = \pi\cos 0 + 2\cdot 0 = \pi \approx 3{,}14159,$$

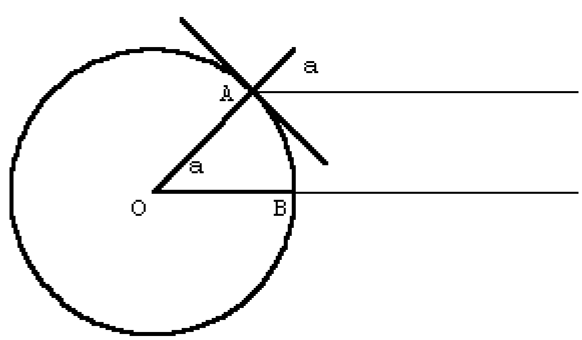
$$f(\pi/2) = \pi\cos\pi/2 + 2\cdot\pi/2 = \pi \approx 3{,}14159$$

Zatem największa wartość funkcji f jest przyjmowana dla kąta równego około $39^0 32'$. Na takiej szerokości geograficznej kosmici powinni założyć opaskę na Ziemię, żeby odholować naszą planetę w bezpieczne miejsce.

Zadanie następne jest również bardzo znane. Rozwiązał je praktycznie Eratostenes z Cyreny, który w 230 roku p.n.e. wyznaczył promień Ziemi ze zdumiewającą dokładnością: 6300 km.

Zadanie 10. Obliczyć obwód Ziemi.

Wystarczy w tym celu zmierzyć długość cienia rzucanego w południe przez Słońce w dwóch miejscowościach leżących na tym samym południku. Najłatwiejsze obliczenia są wtedy, gdy w jednej z miejscowości Słońce stoi akurat w zenicie. Wyznaczamy kąt padania promieni słonecznych w tych dwóch punktach i za pomocą prostej geometrii obliczamy, co trzeba (rysunek). Musimy tylko znać odległość tych dwóch punktów, mierzoną oczywiście wzdłuż południka. Odpowiednie rachunki każdy sam sobie przeprowadzi.



Bardzo interesująca jest tu dyskusja błędów: jaki wpływ na końcowy wynik ma niedokładność pomiaru długości cienia, momentu przejścia Słońca przez południk zerowy i tak dalej....

Gdańsk (w okolicy Sopotu) i Cieszyn na tym samym południku, odległość 519 km.

Wreszcie, na koniec

Zadanie 11. Sami odkrywamy prawo powszechnego ciążenia. Można wyprowadzić prawo powszechnego ciążenia, posługując się tylko prostą geometrią. Tak to podobno – według Woltera – zrobił sam Newton.

Mógł Newton, możemy i my.
Gdy znamy już promień Ziemi, nietrudno wyznaczyć odległość Ziemi od Księżyca. Znów potrzebna tej elementarna trygonometria: mierzymy kąt pod jakim widać Księżyc w tym samym momencie w dwóch różnych miejscach. Dziś możemy też zajrzeć do tabel: odległość ta jest równa w przybliżeniu 60 promieniom ziemskim.
Musimy też znać wartość przyspieszenia ziemskiego. To łatwe: wchodzimy na wieżę w Pizie, zrzucamy coś i mierzymy stoperem czas, w jakim doleci to do Ziemi. No, może dzisiaj to jest trudno wykonalne, bo krzywej wieży nie można już zwiedzać, ale Galileusz podobno właśnie tak obliczył wartość *g* jaką znamy dzisiaj: 9,81 metra na kwadrat sekundy.

Następnie, musimy znać długość miesiąca księżycowego. To najłatwiejsza część pracy, a wynik zna każdy: 28 dni. Dokładnie, średnia wartość miesiąca księżycowego to 27,3217 dnia. A zatem kąt środkowy, odpowiadający godzinie drogi Księżyca po orbicie wokół Ziemi jest równy

$$\alpha = \frac{2\pi}{27{,}32172 \cdot 24} = 0{,}0096 \text{ radiana}$$

i tym czasie Księżyc przemieści się w przestrzeni do innego punktu, odległego od wyjściowego o

$$d = 2r \sin\frac{\alpha}{2} = 3683{,}3669$$

kilometrów. Stąd (rysunek) wyznaczamy $x = \sqrt{d^2 - y^2} = 2r \sin^2\frac{\alpha}{2} = 17{,}647$ kilometra. O tyle Księżyc spadłby na Ziemię w ciągu godziny, gdyby nie było siły odśrodkowej. Ponieważ $\frac{17{,}647}{3600} = 0{,}0049$, więc w pobliżu Ziemi tyle by spadł w sekundę ($3600 = 60^2$). Pamiętając, że odległość Księżyca od Ziemi jest równa 60 promieniom ziemskim, możemy zawołać z dumą:

Eureka, eureka: Siła ciążenia działa odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości!!!