GAL*, konspekt wykładów: Przestrzenie liniowe z iloczynem skalarnym

2014 r.

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.
[Kos roz. 3], [Tor V]. Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Iloczyn skalarny, przestrzenie euklidesowe [Kos roz 3, §1]

1.1 Ortogonalizacja Grama-Schmidta w części o formach dwuliniowych.

1.2 Długość wektora czyli norma, formalne własności normy.

1.3 **Ćwiczenie:** Czy norma w przestrzeni ℓ^p pochodzi od iloczynu skalarnego?

1.4 Nierówność Schwartza: $|(\alpha,\beta)| \leq ||\alpha|| \cdot ||\beta||$.
Dow: Rozważyć funkcję kwadratową $\lambda \mapsto ||\lambda\alpha+\beta||^2 \geq 0$.

1.5 Definicja $\cos(\measuredangle(\alpha,\beta))$ i $|\sin(\measuredangle(\alpha,\beta))|$.

1.6 Twierdzenie kosinusów.

1.7 Nierówność trójkąta.

1.8 Każdy układ niezerowych wektorów parami ortogonalnych, jest liniowo niezależny.

1.9 Każdy układ niezerowych wektorów parami ortogonalnych można uzupełnić do bazy ortogonalnej w przestrzeni skończenie wymiarowej.
(Powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe w przestrzen nieskończenie wymiarowej, patrz układy zupełne.)

1.10 Jeśli $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ jest bazaą ortogonalną to dla dowolnego $\beta \in V$

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\beta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i.$$

Gdy baza jest ortonormalna to

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} (\beta,\alpha_i)\alpha_i.$$

1.11 W przestrzeniach nieskończonego wymiaru rozważamy układy zupełne $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \}$, tzn takie, że

$$\forall i \in \mathbb{N} \;\; (\beta,\alpha_i) = 0 \;\Rightarrow\; \beta = 0\,.$$

Np wektory $\varepsilon_i \in \ell^2$.

1.12 Ważny przykład: $V = C(S^1)$ z iloczynem skalarnym $(f,g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$, podprzestrzeń W = Wielomiany trygonometryczne. Bazą ortogonalną W są funkcje 1, $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ponadto $W^\perp = \{0\}$. Otrzymujemy przykład zupełnego układu wektorów, który nie jest bazą w sensie algebry liniowej.

1.13 Ćwiczenie: Inne przykłady ortonormalnych układów zupełnych.
a) wielomiany Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right)$ ze względu na iloczyn skalarny $(f,d) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.
b) wielomian Czebyszewa T_n (Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$) ze względu na iloczyn skalarny $(f,d) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
c), d) ... wielomiany Hermite'a, wielomiany Laguerre'a ...

1.14 Jeśli mamy zupełny układ wektorów ortogonalnych $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \} \subset V$ to z dowolnym $\beta \in V$ stowarzyszamy szereg

$$\beta \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\beta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i \,.$$

Np dla $V = C(S^1)$ otrzymujemy szereg funkcji, który nie musi być zbieżny punktowo (ponadto są inne rodzaje zbieżności, patrz analiza Fouriera). Oczywiście jeśli wszystkie wyrazy szeregu są zerowe, to $\beta = 0$.

Objętość [Kos roz.4 §3.2,]

1.15 Objętość równoległościanu $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \sqrt{\det G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)}$ gdzie $G_{i,j} = (\alpha_i, \alpha_j)$ (Jeśli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ są liniowozależne, to $\det G = 0$, w przeciwnym przypadku $\det G > 0$ bo to macierz iloczynu skalarnego w bazie α_i).

1.16 Dla $k = 2$ wzór na pole trójkąta $||\alpha_1|| \cdot ||\alpha_1|| \cdot |\sin(\measuredangle(\alpha_1, \alpha_2))|$.

1.17 Odległość $\alpha \in V$ od podprzestrzeni liniowej $W \subset V$ definiujemy jako $\min\{||\alpha - \beta|| \mid \beta \in W\}$. Minimum jest osiągnięte jeśli $\alpha = \gamma + \beta_0$, $\gamma \in W^\perp$ bo $||\alpha - \beta||^2 = ||\gamma + \beta_0 - \beta||^2 = ||\gamma||^2 + ||\beta_0 - \beta||^2$.

1.18 Objętość spełnia
(i) $Vol(\alpha_1) = ||\alpha_1||$
(2) $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = Vol(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}) \cdot h$ gdzie h jest odległością α_k od $lin\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}\}$.

1.19 Dla $k = n$ dostajemy $Vol(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = |\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]|$. Stąd interpretacja geometryczna wyznacznika.

2 Iloczyn wektorowy, przestrzenie euklidesowe

2.1 Iloczyn wektorowy: Dane $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} \in V$, $\dim(V) = n$. Definiujemy funkcjonał

$$\beta \mapsto \det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta].$$

Ponieważ $V \simeq V^*$ za pomocą iloczynu skalarnego, więc istnieje $\gamma \in V$ taki, że dla każdego β

$$\det[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta] = (\gamma, \beta).$$

Definiujemy $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \dots \times \alpha_{n-1} := \gamma$.

2.2 Własności
(i) $\gamma \perp lin\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$
(ii) $|\gamma| = Vol(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$
(iii) jeśli wektory $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ są liniowo niezależne, to baza $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \gamma$ jest dodatniozorientowana.
Te własności definiują γ.

2.3 Dla $n = 3$ mamy dobrze znany iloczyn zadany wzorem ze szkoły:

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

2.4 Z definicji w $\mathbb{R}^3$ mamy

$$(\alpha \times \beta, \gamma) = (\gamma \times \alpha, \beta) = (\beta \times \gamma, \alpha) = \det[\alpha, \beta, \gamma].$$

2.5 Ćwiczenie: $||a \times b||^2 + (a, b)^2 = ||a||^2||b||^2$.

2.6 Patrz zadania z §9 http://duch.mimuw.edu.pl/%7Eaweber/zadania/gal2013w/gal2all.pdf

Przestrzenie euklidesowe

2.7 Metryka w zbiorze X, czyli odległość pomiędzy punktami: $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$:
$d(x, y) = 0 \iff x = y$
$d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

2.8 Pojęcie izometrii i izometrycznego włożenia.

2.9 Przestrzenią euklidesową nazywamy przestrzeń afiniczną E nad $\mathbb{R}$ z iloczynem skalarnym w TE. W przestrzeniach euklidesowych mamy odległość $d(p, q) = ||\omega(p, q)||$.

2.10 Niech $p_0, p_1, \ldots, p_n \in E$ będzie bazą punktową. Wtedy odległości $d(q, p_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots n$ wyznaczają q jednoznacznie.

Przekształcenia

2.11 Rzutowania i symetrie. Niech $F \subset E$ będzie skończenie wymiarową podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej. Wtedy $TE = TF \overset{\perp}{\oplus} (TF)^\perp$. Niech $p \in F$ oraz niech γ_i będzie bazą ortonormalną TF.
– Rzut na F wzdłuż $(TF)^\perp$ jest zadany wzorem

$$\pi(q) = p + \sum_{i=1}^{k} (\gamma_i, \omega(p, q))\gamma_i\,,$$

– Symetria względem F wzdłuż $(TF)^\perp$ jest zadana wzorem

$$\pi(q) = p - \omega(p, q) + 2\sum_{i=1}^{k} (\gamma_i, \omega(p, q))\gamma_i\,.$$

2.12 Izometie. Niech $\dim E < \infty$. Poniższe warunki są równoważne:
1) f zachowuje odległość tzn $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ (nie zakładamy afiniczności),
2) $f : E \to E$ jest przekształceniem afinicznym zachowującym odległość,
3) $f : E \to E$ jest przekształceniem afinicznym, takim że $Df : TE \to TE$ zachowuje iloczyn skalarny.

Dow 1)$\Longrightarrow$ 2): Niech $p_0, p_1, \ldots, p_n$ będzie bazą punktową E taką, że wektory $\alpha_i = \omega(p_0, p_i)$ są ortonormalną bazą TE. Wykazujemy, że $\beta_i = \omega(f(p_0), f(p_i))$ też jest bazą ortonormalną. Mamy $||\beta_i||^2 = d(f(p_0), f(p_i))^2 = d(p_0, p_i)^2 = 1$ oraz dla $i \neq j$ mamy $||\beta_i - \beta_j||^2 = d(f(p_j), f(p_i))^2 =$

$d(p_j, p_i)^2 = 2$. Stąd $(\beta_i, \beta_j) = 0$. Niech g będzie przekształceniem afinicznym zadanym na bazie punktowej $g(p_i) = f(p_i)$. Przekształcenie $Dg; TE \to TE$ zachowuje iloczyn skalarny, więc g zachowyje odległość. Zatem ze względu na **2.10** dla dowolnego $q \in E$ mamy $f(q) = g(q)$.

2.13 Ogólniej rozważa się izometryczne włożenia $f : F \to E$.

2.14 Przykłady: przesunięcia, obroty, symetrie.

2.15 Produkt przestrzeni afinicznych i euklidesowych.

2.16 Niech $\dim E < \infty$. Dla każdej izometrii $f : E \to E$ istnieje rozkład E na produkt przestrzeni

$$E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_k \,,$$

$\dim(E_i) = 1$ lub 2 taki, że rozkład przestrzeni stycznych jest ortogonalny

$$TE = TE_1 \overset{\perp}{\oplus} TE_2 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} TE_k$$

oraz f jest produktem przekształceń $f_i : E_i \to E_i$, tzn

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_k(x_k)) \,,$$

gdzie f_i jest przesunięciem, symetrią lub obrotem.

Dowód w dalszej części wykładu

2.17 Klasyfikacja izometrii $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

3 Przestrzenie unitarne [Kos roz 3, §2]

3.1 Formy półtoraliniowe.

3.2 Jeśli $M = M(\phi) = (\phi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))$ macierz formy ϕ w bazie standardowej, to $\phi(X, Y) = X^T M \overline{Y}$.

3.3 Formy symetryczne $\phi(v, w) = \overline{\phi(w, v)}$. Wtedy $M(\phi) = \overline{M(\phi)}^T$.

3.4 Dla przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$ rozważamy iloczyn hermitowski, to forma półtoraliniowa, symetryczna, niezdegenerowana, dodatnio określona, oznaczana przez $H(v, w)$ lub $\langle\langle v, w \rangle\rangle$.

3.5 Ćwiczenie: czy ϕ zadane przez macierz $\begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ jest iloczynem hermitowskim? Udowodnić kryterium Sylvestera dla form półtoraliniowych.

3.6 Standardowy iloczyn hermitowski $\langle\langle (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \rangle\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b}_j$.

3.7 Ortogonalizacja G-S w przestrzeni unitarnej:

$$\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle}{\langle\langle \beta_j, \beta_j \rangle\rangle} \beta_j \,,$$

$$\gamma_i = \frac{1}{||\beta_i||} \beta_i$$

(uwaga na kolejność $\langle\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\rangle$).

3.8 Grupa unitarna $U(n) = \{A \in GL(\mathbb{C}^n) \,|\, A \cdot \overline{A}^T = I\}$. Piszemy też $A^* = \overline{A}^T$, wtedy dla $A \in U(n)$ mamy $A^{-1} = A^*$.

3.9 W grupie $GL(\mathbb{C}^n)$ mamy $GL(\mathbb{R}^n) \cap U(n) = O(n)$.

3.10 Z ortogonalizacji G-S mamy rozkład Iwasawy KAN dla macierzy zespolonych.

$$GL(\mathbb{C}^n) = U(n) \cdot (\mathbb{R}^*_+)^n \cdot \{\text{górnotrójkątne z jedynkami na przekątnej}\}.$$

Rozkład ten jest jednoznaczny.

Operatory w przestrzeniach z iloczynem hermitowskim, [Kos, roz.3 §3]

3.11 Zakładamy, że $V = \mathbb{C}^n$, rozważamy standardowy iloczyn hermitowski, $M(\phi) = I$.

3.12 $A : V \to V$ jest operatorem unitarnym, jeśli zachowuje iloczyn hermitowski, tzn $\langle A(\alpha), A(\beta)\rangle = \langle \alpha, \beta\rangle$ dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta \in V$. Wtedy (gdy $\dim(V) < \infty$) mamy $A^* = A^{-1}$. We współrzędnych ortonormalnych: macierz operatora należy do $O(n)$ ($U(n)$).

3.13 Ćwiczenie: A jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrią, tzn zachowuje $||\alpha|| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha\rangle}$.

Operatory unitarne i ortogonalne

3.14 Definicja operatora unitarnego/twierdzenie: $V = \mathbb{C}^n$ - przestrzeń ze standardowym iloczynem skalarnym/hermitowskim, $A \in End(V)$. Następujące warunki są równoważne.
1) $\forall \alpha, \beta \in V \ (A(\alpha), A(\beta)) = (\alpha, \beta)$ tzn. A zachowuje iloczyn skalarny
2) $\forall \alpha \in V \ ||A(\alpha)|| = ||\alpha||$ tzn A zachowuje normę
3) Macierz operatora jest unitarna $A \in U(n)$, tzn $A^*A = I$.

3.15 Wartości własne operatora unitarnego mają moduł 1.

3.16 Przestrzenie własne są ortogonalne

3.17 Jeśli $W \subset V$ niezmiennicza, to $W^\perp$ też niezmiennicza.

3.18 Dla operatora unitarnego A istnieje baza unitarna, w której jego macierz jest diagonalna. W zapisie macierzowym: istnieje $C \in U(n)$ t.ż.

$$A = CDC^{-1}\,, \quad D = diag(e^{it_1}, e^{it_2}, \ldots, e^{it_n}).$$

3.19 Dla operatora ortogonalnego $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, istnieje baza ortonormalna taka, że $A = M(f)$ ma macierz blokowo-diagonalną z blokami 2×2 postaci $\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ lub z blokami 1×1: (1) i (-1).

Dowód. Rozważamy przekształcenie unitarne $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ zadane przez tą samą macierz A. Istnieje baza unitarna złożona z wektorów własnych. Dla wartości własnej $\mu \notin \mathbb{R}$ zakładamy, że jeśli α jest wektorem bazowym, to $\overline{\alpha}$ też należy do bazy (ma on wartość własną $\overline{\mu}$). Bierzemy bazę rzeczywistej podprzestrzeni $\mathbb{R}^n \cap lin\{\alpha, \overline{\alpha}\}$ złożoną z wektorów $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \overline{\alpha})$, $\beta_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha - \overline{\alpha})$. Otrzymujemy bazę ortogonalną.

3.20 Ćwiczenie: Grupę izometrii zachowujących orientację w $\mathbb{R}^n$ oznaczamy przez $SO(n)$. Znaleźć ciągłą bijekcję $SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$.

3.21 Ćwiczenie: Izometria $\mathbb{R}^4$ dana jest przez macierz

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Znaleźć blokową diagonalizację.

4 Izometrie afiniczne, operatory samasprzężone, klasyfikacja kwadryk [Kos roz.4 §3]

4.1 Przypomnienie: Każde izomorfizm afiniczny $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ można przedstawić jako złożenie

$$f = tr_\alpha \circ Df = Df \circ tr_\beta,$$

gdzie tr_α oznacza przesunięcie. Ponadto $f(\gamma) = \alpha + Df(\gamma) = Df(\beta + \gamma)$, więc $\alpha = Df(\beta)$. Struktura mnożenia w grupie izomorfizmów afinicznych $Aff^*(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n \rtimes GL(\mathbb{K}^n)$ (produkt półprosty $G \rtimes H$ w sytuacji gdy H działa na G)

$$(\alpha, g) \circ (\beta, h) = (\alpha + g(\beta), gh).$$

4.2 Rozważamy przestrzenie euklidesowe $\mathbb{R}^n$. Przekształcenie f jest izometrią afiniczną wtedy i tylko wtedy, gdy $Df \in O(n)$.

4.3 Dowód tw (2.16), tzn dla każdej izometrii $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$ znajdujemy rozkład na produkt $\mathbb{R}^n = \prod V_i$ (i odpowiadający mu rozkład na ortogonalną sumę prostą przestrzeni stycznych), gdzie $\dim V_i \leq 2$, oraz f zachowuje ten rozkład. W każdej V_i izometria f jest albo obrotem, albo symetrią, albo przesunięciem.

4.4 Ćwiczenie: Każda izometria przestrzeni euklidesowej jest postaci $tr_\alpha g = g tr_\alpha$, gdzie α jest wektorem stałym dla Df, oraz przekształcenie g ma punkt stały. Powyższy rozkład jest jednoznaczny.

4.5 Ćwiczenie: Wiemy, że

$$Df = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \qquad f([0,0,0]) = [-1,-7,2].$$

Co to za przekształcenie?

Operatory sprzężone

4.6 Odwzorowanie $\beta \mapsto f_\beta(\,\cdot\,) = \langle\langle \cdot\,, \beta \rangle\rangle$ zadaje bijekcję $V \to V^*$. We współrzędnych ortonormalnych: $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ zadaje funkcjonał

$$f_\beta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \overline{b}_1 a_1 + \overline{b}_2 a_2 + \cdots + \overline{b}_n a_n\,.$$

– Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ jest to izomorfizm liniowy, macierz tego przekształcenia w bazach $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ to $[(\alpha_i, \alpha_j)]_{1 \leq i,j \leq \dim(V)}$, czyli w bazach standardowych macierz przekształcenia jest równa I.
– Dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ jest to izomorfizm antyliniowy, tzn $f_{\lambda\beta} = \overline{\lambda} f_\beta$.

4.7 Dla zespolonej przestrzeni wektorowej V definiujemy nową przestrzeń wektorową $\overline{V}$. Jako zbiór $V = \overline{V}$, lecz jest inne działanie skalarów: $a \odot \alpha := \overline{a} \cdot \alpha$. W sytuacji 4.6 mamy izomorfizm $V \to \overline{V^*}$ zadany przez iloczyn hermitowski. Rozważając przekształcenie $\alpha \mapsto \langle\langle \alpha, \cdot \rangle\rangle$ dostajemy izomorfizm $V \to (\overline{V})^*$.

4.8 Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}/\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym/hermitowskim, dla wygody oznaczanym przez $(\cdot, \cdot)$,
1) Niech $A : V \to V$ przekształcenie liniowe. Definiujemy formę $\frac{3}{2}$-liniową $\phi^A(\alpha, \beta) = (A(\alpha), \beta)$. W bazie standardowej ϕ^A ma macierz $(M(A)^{st}_{st})^T = A^T$, bo $(A(\alpha), \beta) = (A\alpha)^T \beta = \alpha^T A^T \beta$. To jest bijekcja pomiędzy przekształceniami liniowymi, a formami $\frac{3}{2}$-liniowymi.
2) Równie dobrze możemy zdefiniować formę $\frac{3}{2}$-liniową formułą $\phi_A(\alpha, \beta) = (\alpha, A(\beta))$. Wtedy w bazie standardowej macierz ϕ_A jest równa $\overline{A}$. To jest inna bijekcja pomiędzy przekształceniami liniowymi, a formami $\frac{3}{2}$-liniowymi (antyliniowa).
3) w efekcie mamy odpowiedniość

$$\begin{array}{ccccc} End(V) & \leftrightsquigarrow & \text{formy } \frac{3}{2}\text{-liniowe} & \leftrightsquigarrow & End(V) \\ A & \longleftrightarrow & \phi^A = \phi_B & \longleftrightarrow & B \end{array}$$

Operatory A i B spełniają $(A(\alpha), \beta) = (\alpha, B(\beta))$ dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta \in V$. Mówimy, że B jest operatorem sprzeżonym do A i oznaczany A^*. Jego macierz w standardowej bazie to $\overline{M(A)^{st}_{st}}^T = \overline{A}^T$. Konstrukcja nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej/unitarnej. Mamy $(A^*)^* = A$.

4.9 W przestrzeni nieskończenie wymiarowej mówimy, że operatory A i B są formalnie sprzęzone jeśli zachodzi $(A(\alpha), \beta) = (\alpha, B(\beta))$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in V$. Jednak nie zawsze A wyznacza B.

Ćwiczenie: niech $V = C(S^1)$, $(f, g) = \int_{S^1} f(t) g(t) dt$, $A(f) = f(a)\mathbb{1}$, gdzie $\mathbb{1}$ jest funkcją stale równą 1 oraz $a \in S^1$. Wykazać, że A nie dopuszcza żadnego operatora formalnie sprzężonego do niego.

Operatory samosprzężone

4.10 Operator A jest samosprzężony (hermitowski), jeśli $A = A^*$. We współrzędnych ortonormalnych: macierz operatora jest symetryczna (ze sprzężeniem).

4.11 Wartości własne są rzeczywiste

4.12 Każdy operator samosprzężony ma wektor własny.

4.13 Przestrzenie własne są ortogonalne

4.14 Jeśli W jest podprzestrzenią A-niezmienniczą, to $W^\perp$ też.

4.15 Twierdzenie spektralne. Jeśli A jest operatorem samosprzężonym w przestrzeni skończonego wymiaru, to istnieje baza orogonalna, w której operator ma macierz diagonalną, o wyrazach rzeczywistych. Rozkład

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda \, ,$$

jest ortogonalny.

4.16 Ćwiczenie: złożenie operatorów samosprężonych jest smosprzężone wtedy i tylko wtedy gdy są one przemienne.

4.17 Każda rzeczywista macierz symetryczna A da się zapisać jako CDC^{-1}, gdzie $C \in O(n)$, tzn $C^{-1} = C^T$, a D jest diagonalna.

4.18 To samo dla zespolonych: Jeśli $A = A^*$, to CDC^{-1}, gdzie $C \in U(n)$.

4.19 W przestrzeni nieskończenie wymiarowej wiemy jedynie, że przestrzenie własne operatora formalnie samosprzężonego są ortogonalne.

4.20 Ćwiczenie: Niech $V = C^\infty(S^1)$. Sprawdzić, że operator $A(f) = -f''$ jest samosprzężony. Jakie jest spektrum? Udowodnić

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda\right)^\perp = \{0\}\,.$$

4.21 Ćwiczenie: Podać przykład operatora A, który jest formalnie samosprzężony oraz

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in Spec(A)} V_\lambda\right)^\perp \neq \{0\}\,.$$

Wsk: Niech V przestrzeń funkcji na $\mathbb{Z}$ o skończonym nośniku

$$V = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \mid \exists M \in \mathbb{R} \text{ takie, że } |n| > M \;\Rightarrow\; f(n) = 0\}$$

z iloczynem hermitowskim $(f, g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\overline{g(n)}$ oraz $A(f)(n) = \frac{1}{2}(f(n-1) + f(n+1))$.

Kwadryki w przestrzeni euklidesowej

4.22 Wniosek z diagonalizacji: dla każdej macierzy symetrycznej Q istnieje macierz ortogonalna C, taka, że $C^T QC$ jest diagonalna. Zatem dla danej formy kwadratowej $q(x)$ w przestrzeni z iloczynem skalarnym. Istnieje ortonormalny układ współrzędnych $\{y_i(x)\}$ taki, że $q(x) = \sum a_i y_i^2$.

4.23 Kierunki osi głównych kwadryk, to kierunki własne stowarzyszonego operatora samosprzężonego.

4.24 Kanoniczne formy kwadryk. Każdą kwadrykę w przestrzeni euklidesowej można sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą izometrii:

$$(1)\;\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \qquad (k+\ell \leq n)$$

$$(2)\;\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 0 \qquad (k+\ell \leq n),$$

$$(3)\;\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=k+1}^{k+\ell} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 2x_n \qquad (k+\ell < n).$$

Liczby a_i w (1) to długości osi głównych.

4.25 Przykład: znaleźć osie główne kwadryki $6x^2 + 4xy + 9y^2 = 100$.

4.26 Ćwiczenie: Środek symetrii a kwadryki opisanej równaniem $x^TQx - 2Lx = C$ spełnia równanie $Qa = L^T$. Które z kwadryk w postaci kanonicznej nie mieją lub mmają wiele środków symetrii?

4.27 Sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą izometrii

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - x + 4y = 5.$$

5 Rzutowania, urzeczywistnienie i kompleksyfikacja, pewne podgrupy $GL_{2n}(\mathbb{R})$ [Kos roz.3 §4]

5.1 Operator jest rzutowaniem ortogonalnym jeśli $A = A^*$ i $A^2 = A$. Przestrzeń V rozpada się na sumę prostą ortogonalnych przestrzeni $ker(A)$ i $im(A)$.

5.2 Twierdzenie spektralne można sformułować tak: Każdy operator samosprzężony jest kombinacją liniową przemiennych rzutowań ortogonalnych.

5.3 Przestrzeń rzutową $\mathbb{RP}^{n-1}$ można utożsamić z podzbiorem $O(n)$ macierzy spełniających $A^2 = Id$ i $rk(A + Id) = 1$. (Prostej przypisujemy odpowiednią symetrię.)

$$\mathbb{RP}^{n-1} \simeq \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, A = A^T,\, A^2 = A,\, tr(A) = 1\,\}.$$

5.4 *Podobnie można zanurzyć w $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zbiór wszystkich podprzestreni liniowych ustalonego wymiaru tj. grassmannian. Otrzymujemy zbiór dmoknięty i ograniczony w przestrzeni afinicznej. Czyli jest to zbiór zwarty.*

Zmiana ciała bazowego.

5.5 Urzeczywistnienie przestrzeni zespolonej $V \rightsquigarrow V_{\mathbb{R}}$ (zapominamy o mnożeniu przez i) oraz struktura zespolona $J : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$.

5.6 Jeśli w V dana baza $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, to $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, i\alpha_1, i\alpha_2, \ldots, i\alpha_n$ jest bazą $V_{\mathbb{R}}$, a J ma macierz blokową $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

5.7 Grupę $GL_n(\mathbb{C})$ utożsamiamy z podgrupą macierzy rzeczywistych $2n \times 2n$ przemiennych z $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$. Macierzy $A \in GL_n(\mathbb{C})$ odpowiad macierz blokowa $J = \begin{pmatrix} re\,A & -im\,A \\ im\,A & re\,A \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$.

5.8 Dany automorfizm przestrzeni rzeczywistej $J : W \to W$, taki że $J^2 = -Id$. Wtedy W jest parzystego wymiaru i w W można wrpowadzić strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{C}$ definiując $(a + bi)\alpha = a\alpha + bJ(\alpha)$. **Automorfizm J spełniający $J^2 = -Id$ nazywamy strukturą zespoloną.**

5.9 Kompleksyfikacja przestrzeni rzeczywistej W to przestrzeń $W_{\mathbb{C}} := W \times W$ wraz ze strukturą zespoloną $J(\alpha, \beta) = (-\beta, \alpha)$. Zatem mnożenie przez $z = a + bi$ zadane jest wzorem. $(a + bi)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$.

5.10 Ćwiczenie: Dla przestrzeni zespolonej V można wskazać izomorfizm nie zależny od wyboru bazy $(V_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \simeq V \oplus \overline{V}$.

5.11 Przyporządkowania $V \mapsto V_{\mathbb{R}}$ dla przestrzeni zespolonej (i $V \mapsto V_{\mathbb{C}}$ dla przestrzeni rzeczywistej) są **funktorialne**, to znaczy, że dla $A : V \to W$ można zdefiniować $A_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$, tak że $(AB)_{\mathbb{R}} = A_{\mathbb{R}} B_{\mathbb{R}}$ (podobnie dla kompleksyfikacji). Ponadto mamy dla V przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$ i W, przestrzeni liniowej nad $\mathbb{C}$:

$$L_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W) = L_{\mathbb{R}}(V, W_{\mathbb{R}}),$$

gdzie $L_{\mathbb{K}}(A, B)$ oznacza zbiór funkcji $\mathbb{K}$-liniowych $A \to B$. Mówimy, że funktory

$$V \mapsto V_{\mathbb{C}} \qquad \text{i} \qquad W \mapsto W_{\mathbb{R}}$$

są dołączone.

Patrz: kategorie i funktory np http://www.mimuw.edu.pl/%7Ejarekw/SZKOLA/algebra2star/seria2.pdf

5.12 Niech $Sp_n(\mathbb{R})$ oznacza podgrupę $GL(\mathbb{R}^{2n})$ automorfizmów zachowujących formę symplektyczną zadaną przez J,

$$\omega(v, w) = \langle v, Jw \rangle,$$

tzn takich A, że dla każdej pary $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$ mamy $\omega(\phi(v), \phi(w)) = \omega(v, w)$.

5.13 W grupie $GL_{2n}(\mathbb{R})$ mamy podgrupy
$O(2n) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$,
$Sp_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$,
$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid AJ = JA\}$,
Przecięcie dwu z powyższych grup jest zawarte w trzeciej.

5.14 Ćwiczenie: dla operatora zespolonego $\det(A_{\mathbb{R}}) = |\det(A)|^2$.

6 Iloczyn hermitowski cd, rozkład biegunowy, kwaterniony

6.1 Jeśli $\langle\langle v, w \rangle\rangle$ jest iloczynem hermitowskim na V, to na $V_{\mathbb{R}}$ forma $(v, w) = re\langle\langle v, w \rangle\rangle$ jest iloczynem skalarnym, a $\omega(v, w) = im\langle\langle v, w \rangle\rangle$ jest formą symplektyczną. Obie te formy są J niezmiennicze, oraz $\omega(v, w) = (Jv, w)$.

6.2 $U(n) = O(2n) \cap Sp(n) = O(2n) \cap GL(\mathbb{C}^n) = Sp(n) \cap GL(\mathbb{C}^n)$.

Operatory samosprzężone dodatniookreślone [Kos roz.3, §3.6]

6.3 Nieujemnie określone operatory samosprzężone: $(Bx, x) = (x, Bx) \geq 0$. Dla każdego operatora samosprzężonego nieujemnie określonego istnieje ,,pierwaistek", tzn operator samosprzężony, nieujemnie określony P, taki, że $P^2 = B$. Na podprzestrzeni wlasnej V_λ operator P jest równy $\sqrt{\lambda}$.

6.4 Przykład: $B = A^* A$ dla pewnego operatora A.

6.5 Ćwiczenie: Niech $V = C^\infty(S^1)$. Sprawdzić, że operator $A(f) = -f''$ jest nieujemnie określony samosprzężony. Jakie jest spektrum? (Jest on postaci $B^* B$.)

6.6 [Kos roz.3, §3.9] Rozkład polarny (biegunowy): każdy operator A da się zapisać jako złożenie $Q\,P$, gdzie Q należy do $O(n)$ (lub $U(n)$), P jest nieujemnie określony.
Dow: Jeśli A odwracalny $P = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$, $Q = AP^{-1}$ $QQ^* = (AP^{-1})(P^{-1}A^*) = A(A^*A)^{-1}A^* = I$
Dla nieodwracalniego A rozważamy $A_\epsilon = A + \epsilon I$. Dostajemy $A_\epsilon = Q_\epsilon P_\epsilon$. Można wybrać cąg $\epsilon_n \to 0$, taki, że Q_{ϵ_n} jest zbieżny.

6.7 Uwaga: nazwa od rozkladu polarnego liczby zespolonej (tzn $\dim V = 1$)

6.8 Operator P jest jednoznacznie wyznaczony (równy $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$), a jeśli A jest odwracalny, to Q też jest jednoznacznie wyznaczony.

6.9 Podsumowanie twierdzeń o macierzach kwadratowych $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (oraaz wersje rzeczywiste)
- tw Jordana
- rozklad KAN dla odwracalnych M: $M = KB$, $K \in U(n)$, B górnotrójkątna
- rozkład polarny $M = KP$, $K \in U(n)$, $P = P^*$
- diagonalizacja w bazie ortonormalnej operatorów unitarnych (blokowa nad $\mathbb{R}$),
- diagonalizacja w bazie ortonormalnej operatorów samosprzężonych - wartości własne rzeczywiste
- i antysamosprzężonych (tzn gdy $M^* = -M$, Ćwiczenie) - wartości własne urojone
- rozkład Choleskiego macierzy symetrycznych dodatnio określonych

6.10 Ćwiczenie: Dane $0 < k < n$. Niech $A \in End(\mathbb{R}^n)$ zachowuje objętość równoległościanów k-wymiarowych. Pokazać, że A jest izometrią.

Kwaterniony [Tor V, §5.4-6]

6.11 $SU(2) \simeq S^3$ (pierwsza kolumna jest dowolnym wektorem jednostkowym w $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, a druga postaci $(-\overline{b}, \overline{a})$)

6.12 Niech

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Zbiór $\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ jest grupą ze względu na mnożenie macierzy:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \qquad \mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k} = \mathbf{j}.$$

6.13 Przestrzeń kwaternionów ($\mathbb{H}$ od Hamiltona)

$$\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$$

oraz kwaterniony czysto urojone

$$im\mathbb{H} = lin_{\mathbb{R}}\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}.$$

Tak jak poprzednio x^* oznacza $\overline{x}^T$. Dla kwaternionów czysto urojonych $x^* = -x$. „*" nazywamy sprzężeniem kwaternionowym.

6.14 Mamy $(xy)^* = x^*y^*$, bo to zachodzi dla bazy pochodzącej z $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

6.15 Dla $x \in \mathbb{H}$ mamy $x \cdot x^* \in \mathbb{R}_+$. Definiujemy $||x|| = \sqrt{x \cdot x^*}$. Dla $x = a\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mamy $||x|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

6.16 Mamy $||xy|| = ||x||\,||y||$.

6.17 Algebra z dzieleniem nad $\mathbb{K}$, to taka algebra nad $\mathbb{K}$ z jedynką, że każdy element różny od 0 jest odwracalny.

6.18 Każdy kwaternion niezerowy jest odwracalny $x^{-1} = x^*/||x||^2$, czyli kwaterniony są algebrą z dzieleniem nad $\mathbb{R}$.

6.19 Twierdzenie Freudenthala (bez dowodu): Jedyne skończenie wymiarowe algebry z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i $\mathbb{H}$.

6.20 Kwaterniony o normie jeden to macierze spełniające $xx^* = 1$. Zatem to są macierze z $SU(2)$. Stąd $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+ \cdot SU(2) \cup \{0\}$.

7 Kwaterniony i czasoprzestrzeń

7.1 Iloczyn skalarny w przestrzeni kwaternionów czysto urojonych $(x, y) := -re(xy)$.

7.2 Przyjmujemy orientacje w $im\mathbb{H}$, tak aby $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ była bazą dodatnio zorientowaną. Dla kwaternionów czysto urojonych mamy

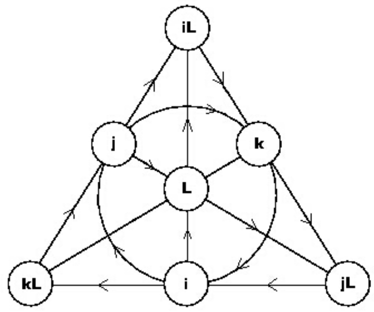
$$x \cdot y = -(x, y) + x \times y.$$

7.3 Dla dowolnego jednostkowego kwaternionu $x \in SU(2)$ przekształcenie $im\mathbb{H} \ni y \mapsto xyx^* \in im\mathbb{H}$ jest izometrią. Stąd otrzymujemy przekształcenie $SU(2) \to SO(3) \subset GL(im\mathbb{H})$.

7.4 Geometrycznie przekształcenie zadane przez $x = \cos(t) + \sin(t)\ell$ dla czysto urojonego kwaternionu jednostkowego ℓ jest obrotem wokół ℓ o kąt $2t$.
Dow: rachunek osobno dla $y \in lin\,\ell$ i $y \in lin\,\ell^\perp$.

7.5 Powyższe przekształcenie $SU(2) \to SO(3)$ jest ,,na", 2 do 1, jądrem jest $\{I, -I\}$.

7.6 Jeszcze są niełączne oktoniony $\mathbb{O}$



Patrz `http://math.ucr.edu/home/baez/octonions/oct.pdf`

7.7 W $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$ są spełnione:
1. $a \cdot a^* = a^* \cdot a = ||a||^2 \mathbb{1}$
2. $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$
3. $a + a^* \in \mathbb{R} \cdot \mathbb{1}$
4. $re(a \cdot b) = re(b \cdot a)$, gdzie re zdefiniowane jako rzut na $lin(\mathbb{1})$
5. $re(a \cdot (b \cdot c)) = re((a \cdot b) \cdot c)$

7.8 Zamiast $||a||$ rozważamy formę kwadratową $q(a) = ||a||^2$. Forma kwadratowa zadaje iloczyn skalarny, sprzężenie jest zdefiniowane jako symetria względem $lin(\mathbb{1})$, część rzeczywista $re(a)$ to rzutowanie na $lin(\mathbb{1})$. Czyli wszystko jest zdefiniowane za pomocą formy kwadratowej.

7.9 Algebra Hurwitza to skończenie wymiarowa algebra z jedynką, niekoniecznie łączna wyposażona w dodatnio określaoną formę kwadratową formę q spełniającą $q(a \cdot b) = q(a)q(b)$.

7.10 Tw Hurwitza: jedyne algebry Hurwitza z dzieleniem nad $\mathbb{R}$ (z dokładnością do izomorfizmu) to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ i $\mathbb{O}$.

7.11 Związki z polami wektorowymi na sferze: jeśli w $\mathbb{R}^{n+1}$ jest struktura algebry z dzieleniem, to na S^n jest n liniowo niezależnych pól:
Dow. Wybieramy iloczyn skalarny w R^{n+1}. Niech $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ będzie jedynką algebry. Dobieramy elementy $v_1, v_2, \dots, v_n$ stanowiące bazę $lin\{\mathbb{1}\}^\perp$. Wtedy dla każdego $g \in S^n$ elementy $g, gv_1, gv_2, \dots, gv_n$ stanowią bazę $\mathbb{R}^{n+1}$. Niech π_g będzie rzutowaniem na $lin\{g\}^\perp$. Wektory $v_i(g) = \pi_g(gv_i)$ dla $i = 1, 2, \dots n$ stanowią bazę $lin\{g\}^\perp$. To są pola wektorowe na S^n, ciągłe w zależności od $g \in S^n$ i liniowo niezależne.

Z tw. o zaczesywaniu sfery S^2 (nie ma ani jednego nigdzie nie znikającego pola) widzimy, że w $\mathbb{R}^3$ nie ma struktury algebry z dzieleniem.

Nieokreślone formy kwadratowe i ich grupy automorfizmów [Kos roz.4 §4]

7.12 Jeśli forma kwadrarowa określona przez symetryczną macierz B, to automorfizmami tej formy są przekształcenia liniowe o mocierzy A spełniającej $A^T BA = B$.

7.13 Przestrzenie z formą kwadratową typu (m, n), grupy $O(m, n)$, $SO(m, n)$, $SO(m, n)^+$

7.14 Ćwiczenie istnieje ciągła bijekcja $O(m, n) \simeq O(m) \times O(n) \times \mathbb{R}^{mn}$. (Jeśli $m \neq 0$ i $n \neq 0$, to grupa $O(m, n)$ ma 4 składowe spójne.)

7.15 Jeśli założyć, że nie możemy poruszać się prędzej niż światło, to nie możemy przekroczyć horyzontu zdarzeń będącego brzegiem obszaru $||x|| < c|t|$. Horyzont zdarzeń jest opisany równaniem kwadratowym $q(t, x) = c^2t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$. Zmiany układu współrzędnych typu $x' = f(x) + a\,t$ (układ poruszający się) muszą zachowywać horyzont zdarzeń. Jeśli $a = 0$, to f ma być izometrią. Sugeruje to, że powinniśmy rozważać przekształcenia liniowe czasoprzestrzeni zachoujące formę kwadratową q. Dla uproszczenia przyjmujemy $c = 1$.

Grupa $O(1, 1)$

7.16 Najpierw rozważmy przestrzeń jednowymiarową, czyli czasoprzestreń ze współrzędnymi (t, x) z forma kwadratową $t^2 - x^2$. Grupa $O(1, 1)$ składa się z macierzy postaci $\begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$, takich, że $u^2 - v^2 = 1$ oraz $(u, v) \sim (z, w)$. Można przyjąc $u = \pm \cosh(\lambda)$, $v = \pm \sinh(\lambda)$.

7.17

$$SO(1,1) = \left\{ A = \begin{pmatrix} \frac{a^{-1}+a}{2} & \frac{a^{-1}-a}{2} \\ \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a^{-1}+a}{2} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^* \right\}, \qquad SO(1,1)^+ = \left\{ A = \begin{pmatrix} \frac{a^{-1}+a}{2} & \frac{a^{-1}-a}{2} \\ \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a^{-1}+a}{2} \end{pmatrix} : a > 0 \right\}$$

7.18 Wniosek $SO(1,1)^+ \simeq \mathbb{R}_{>0}$ z działaniem mnożenia.

7.19 Niech $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Prędkość definiujemy jako $v := \frac{x_0}{t_0} = \frac{a^{-1}-a}{a^{-1}+a} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$. Mamy $|v| < 1 =: c$. Stąd $a = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$, $\frac{a+a^{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $\frac{a-a^{-1}}{2} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$.

7.20 Podstawiając do transformacji $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$

$$t' = \frac{t + vx}{\sqrt{1+v^2}}, \qquad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1+v^2}}, \qquad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

7.21 Ćwiczenie: Jeśliby $c \neq 1$, forma kwadratowa $c^2t^2 - x^2$, to

$$t' = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

7.22 Odległość zmienia się zgodnie ze wzorem $|x_1' - x_2'| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1-v^2}}$ dla $t_1 = t_2$

7.23 Podobnie czas $|t_1' - t_2'| = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1-v^2}}$ dla $x_1 = x_2$

7.24 Jeśliby $c \neq 1$, to $|x_1' - x_2'| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $|t_1' - t_2'| = \frac{|t_1 - t_2|}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

7.25 Ćwiczenie: wyprowadzić wzór na składanie prędkości $v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}$

7.26 Czasoprzestrzeń $\mathbb{R}^4$ z formą typu $(1,3)$. Badamy grupę $SO(1,3)^+$ to składowa identyczności $SO(3,1)$ (te przekształcenia, które dadzą się w sposób ciągły zdeformować do Id. (Inna nazwa: właściwa grupa Lorenza.)

7.27 Niech $V \subset M(2 \times 2; \mathbb{C})$ zbiór macierzy hermitowsko symetrycznych tzn $X = X^*$,

$$X = \begin{pmatrix} t + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & t - x_1 \end{pmatrix}.$$

Forma kwadratowa: $q(A) = \det(A) = t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Utożysamiamy czasoprzestrzeń ze zbiorem operatorów samosprężonych w $\mathbb{C}^2$

8 Grupa Lorentza

8.1 Mamy izomorfizm $S0(1,1)^+ \simeq \mathbb{R}$, $t \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$.
Pokażemy, że $L^+ := SO(1,3)^+ \simeq PGL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$

8.2 Przestrzeń V rozpada się na podzbiory zachowywane przez $SO(1,3)^+$
– zera formy q tzn stożek światła
– $q < 0$ tzn tam wartości własne X mają różne znaki
– dwie składowe $q > 0$ tzn tam wartości własne X mają takie same znaki (stożek dodatni i ujemny)

8.3 Oś czasowa V to $V_t = lin\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, a część przestrzenna to

$$V_x = lin\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

(to są macierze Pauliego, mnożąc przez i dostajemy bazowe kwaterniony).

8.4 Część przestrzenna jest opisana równaniem $t = \frac{1}{2}tr(X) = 0$.

8.5 Grupa $SL_2(\mathbb{C})$ działa na V przez: $A \cdot X := AXA^*$. Podgrupa $SU(2)$ zachowuje współrzędną czasową. Odpowiada to zamianom układu współrzednych z prędkością 0.
Dow: $tr(AXA^*) = tr(XA^*A) = tr(X)$ dla każdego X.

8.6 Jeśli A zachowuje współrzędną czasową t, to $A \in SU(2)$. (Z równości $A^*IA \in \mathbb{R}I$ wynika, że $A^*A = I$, więc $A \in SU(2)$.)

8.7 To działanie zgadza się z działaniem na $im\mathbb{H} = i\,V_x$

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \subset & SL_2(\mathbb{C}) \\ \curvearrowright & & \curvearrowright \\ im\mathbb{H} & \overset{\cdot i}{\hookrightarrow} & V \end{array}$$

8.8 Otrzymane odwzorowanie $SL_2(\mathbb{C}) \to SO(1,3)^+$ jest ,,na", 2 do 1, $ker = \{\pm I\}$.
Dow: sprawdzamy, że jądro tego odwzorowania, to $\pm I$ i liczymy wymiary (stopnie swobody) w obu grupach (wychodzi 6) i korzystamy z ogólnej własności grup (grup Liego): jeśli grupy mają równy wymiar, a jądro odwzorownia jest skończone, to obraz zawiera całą składową identyczności. (Nie dowodzimy tego twierdzenia, elementarny dowód epimorficzności może być traktowane jako **Ćwiczenie**).

8.9 Definiujemy przestrzeń Łobaczewskiego Λ jako zbiór prostych w stożku dodatnim [Kos roz.7 §5]. Czyli $\Lambda \subset \mathbb{P}(V)$ jest zawarta w mapie afinicznej $t \neq 0$. We współrzędnych $u_i = x_i/t$ zbiór Λ jest opisany nierównością $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1$.

8.10 Przestrzeń Łobaczewskiego utożsamiamy też z

$$H = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) | A = A^*,\, tr(A) > 0,\, det(A) = 1\} \simeq \{(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 | t > 0, t^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1\}$$

8.11 Działanie $SO(1,3)^+$ na Λ jest
– przechodnie (tzn jest jedna orbita, tzn $\forall x, y \in \Lambda\ \exists g \in SO(1,3)^+\ x = g \cdot y$)
– stabilizator (=grupa izotropii, = grupa stacjonarna) każdego punktu jest izomorficzny z $SO(3)$
Dw: Utożsamiamy Λ z $H \subset M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Pokażemy, że działając $SL_2(\mathbb{C})$ każdą macierz X przekształcimy na I. Macierzą z $SU(2)$ doprowadzamy X do postaci diagonalnej (twierdzenie spektralne) $diag(a, a^{-1})$. Wyrazy na przekątnej są > 0, bo $X \in H$. Teraz za pomocą $A = diag(a^{-1/2}, a^{1/2})$ doprowadzamy do I. Stabilizator liczymy dla $X = I$.

8.12 W każdym punkcie $p \in H \subset \mathbb{R}^4$ forma kwadratowa $-t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ obcięta do przestrzeni stycznej do H jest niezdegenerowaną formą dodatnio określoną. Definiunje ona *geometrię hiperboliczną*. (W dim=2 patrz *dysk Poincaré*.)

8.13 Ćwiczenie: dla każdego $X \in H$ znaleść formułe na normę w przestrzeni stycznej do H. Wyrazić ją we współrzędnych $u_i = x_i/(1+t)$. (Odp: $||v||_u = \frac{2}{1-||u||^2}||v||$ dla $v \in T_uH$.)

8.14 Ćwiczenie: opisać orbity działania $SL_2(\mathbb{C})$ na całej $\mathbb{P}(V)$.