GAL*, konspekt wykładów: Endomorfizmy

11 marzec 2014

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Ciała, wyznaczniki

1.1 Przypomnienie aksjomatów ciała. Wprowadzenie pojęcia grupy i pierścienia.

1.2 Ciała $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ i ciałą pośrednie np. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\pi)$. Ciała $\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ (p-liczba pierwsza). Np. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}\sqrt{2}$ jako przestrzenie liniowe.

1.3 Ciała funkcji wymiernych $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{K}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

1.4 Przykład: $\mathbb{Q}(X) \simeq \mathbb{Q}(\pi)$

1.5 Każde ciao zawiera najmniejsze podciało. jest ono izomorficzne z $\mathbb{F}_p$ lub $\mathbb{Q}$.

1.6 Charakterystyka ciała $char(\mathbb{K}) = p$ jeśli $\mathbb{K}$ zawiera ciało izomorficzne z $\mathbb{F}_p$, w przeciwnym razie $char(\mathbb{K}) = 0$.

1.7 Ciała skończone. Twierdzenie: ilość elementów ciała skończonego jest równa p^n, gdzie p jest liczbą pierwszą, a n liczbą naturalną.

1.8 Twierdzenie (bez dowodu) dla każdej liczby pierwszej p i $n \in \mathbb{N}$ istnieje ciało o p^n elementach. Jest ono jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Każdy element tego ciała spełnia równanie $x^{p^n} - x = 0$. Innymi słowy wielomian $x^{p^n} - x$ w ciele $\mathbb{F}_{p^n}$ ma p^n różnych pierwiastków.

1.9 Przykłady:
$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2\, a$, gdzie a spełnia $a^2 + a + 1 = 0$
$\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2\, a \oplus \mathbb{F}_2\, a^2$, gdzie a spełnia $a^3 + a + 1 = 0$
$\mathbb{F}_9 = \ldots$, $\mathbb{F}_{27} = \ldots$.

1.10 Ogólna metoda: niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym o q elementach, a $f \in \mathbb{F}[X]$ nierozkładalnym wielomianem stopnia n. Wtedy przestrzeń liniowa reszt z dzielenia przez f w $\mathbb{F}[X]$ z działaniem mnożenia modulo f jest ciałem o q^n elementach.

Wyznaczniki [H. Toruńczyk, Notatki z wykładów IV]

1.11 Twierdzenie o jednoznaczności wyznacznika: jeśli funkcja $D : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ spełnia
1) Jest liniowa ze względu na każdy wiersz (kolumnę),
2) Jeśli dwia wiersze (kolumny) macierzy są równe, to $F(A) = 0$
3) $D(I) = 1$
to $D(A) = \det(A)$ dla każdej macierzy A.

1.12 Funkcja spełniająca 1) i 2) w twierdzeniu powyżej nazywa się alternującą ze wzgldu na wiersze (kolumny).

1.13 1) i 2) implikuje

2') Jeśli w macierzy A zamienić dwa wiersze (kolumny) to znak $D(A)$ zmienia się.

1.14 Jeśli charakterystyka ciała nie jest równa dwa to 1) i 2') implikuje 2).

2 Orientacja, przestrzenie ilorazowe

Orientacja [Tor IV §4.2] Niech V będzie przestrzenią wektorową skończonego wymiaru nad $\mathbb{R}$. Rozważamy różne bazy V. Mowimy, że baza $\mathcal{A}$ jest zgodna z $\mathcal{B}$ jeśli $\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(Id) > 0$. To jest relacja równoważności w zbiorze baz.

2.1 Są dwie klasy abstrakcji: Jeśli $\mathcal{A} \not\sim \mathcal{B}$ i $\mathcal{B} \not\sim \mathcal{C}$ to $\mathcal{A} \sim \mathcal{C}$.

2.2 $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ wtedy i tylko jeśli istnieje ciągła rodzina baz $\mathcal{A}_t$, $t \in [0,1]$ taka, że $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ i $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}$.

2.3 Ćwiczenie: Jeśli V jest przestrzenia zespoloną, przez $V_{\mathbb{R}}$ rozumiemy przestrzeń wektorową rzeczywistą, równą V jako zbiór, jedynie zapominamy o mnożeniu przez liczby urojone. Niech $\phi : V \to V$ będzie liniowym izomorfizmem. Wykazać, że ϕ przeprowadza dowolną bazę $V_{\mathbb{R}}$ na bazę zgodną.

Przestrzenie ilorazowe [Kostrykin I.2.6] i kategoryjne definicje

2.4 Niech $W \subset V$ para podprzestrzeni. Definiujemy relację równoważności w V: $\alpha \sim \beta$ jeśli $\alpha - \beta \in W$. Zbiór klas abstrakcji ma strukturę przestrzeni liniowej. Oznaczenie V/W.

2.5 Odwzorowanie $\pi : V \to V/W$ jest liniowe, jest epimorfizmem, $ker(\pi) = W$.

2.6 Jeśli $V = W \oplus U$ to $V/W \simeq U$.

2.7 Jeśli V jest skończonego wymiaru, to $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$.

2.8 Twierdzenie o izomorfizmie: niech $\phi : V \to Z$ będzie przekształceniem liniowym, wtedy istnieje przekształcenie $\overline{\phi} : V/ker(\phi) \to Z$ takie, że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$. Ponadto $\overline{\phi}$ zadaje izomorfizm $V/ker(\phi) \simeq im(\phi)$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & im(\phi) \arrow[r, hook] & Z \\
V/ker(\phi) \arrow[ur, dotted, "\overline{\phi}", "\simeq"'] & &
\end{tikzcd}$$

2.9 Wniosek: Jeśli $\phi : V \to Z$ jest epimorfizmem, to $Z \simeq V/ker(\phi)$.

2.10 Ćwiczenie: Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem domkniętym oraz niech $C(A)$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na S. Wtedy $C(A) \simeq C(\mathbb{R})/I(A)$, gdzie $I(A) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \forall x \in A\,, f(x) = 0\}$.

2.11 Ćwiczenie: udowodnić dla $U, W \subset V$:

$$(U + W)/U \simeq W/(U \cap W).$$

2.12 Własność uniwersalna ilorazu: dla każdego przekształcenia liniowego $\phi : V \to Z$ takiego, że $\phi_{|W} = 0$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie $\overline{\phi}$ takie,że $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd}
 & & V/W \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\
W \arrow[r, "\iota"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Własność uniwersalna determinuje iloraz z dokładnością do izomorfizmu. Jeśli odwzorowanie $\pi' : V \to \overline{V}$ spełnia warunek: $\pi' \circ \iota = 0$ *oraz dla każdego przekształcenia liniowego* $\phi : V \to Z$ *takiego, że* $\phi_{|W} = 0$ *istnieje dokładnie jedno przekształcenie* $\overline{\phi}$ *takie,że* $\phi = \overline{\phi} \circ \pi$*:*

$$\begin{tikzcd}
 & & V' \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\
W \arrow[r, "\iota"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "\pi'"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

to $V' \simeq V/W$ oraz ten izomorfizm jest zgodny z rzutowaniami $\pi' : V \to V'$ i $\pi : V \to V/W$.
Innymi słowy: wszystkie przekształcenia z V zerujące się na W jednoznacznie faktoryzują się przez V/W. Własność jednoznacznej faktoryzacji definiuje V/W

2.13 Uogólnienie: Niech $\psi : W \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Kojądro $coker(\psi)$ definiujemy poprzez własność uniwersalną.

$$\begin{tikzcd}
 & & coker(\psi) \arrow[dd, dotted, "\exists!\overline{\phi}"] \\
W \arrow[r, "\psi"] \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "0"'] & V \arrow[ur, "\pi"] \arrow[dr, "\forall\phi"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

Mamy $coker(\psi) \simeq V/im(\psi)$

2.14 Kategoryjna definicja jądra:

$$\begin{tikzcd}
 & & ker(\psi) \arrow[dll, "0"'] \arrow[dl, "\pi"'] \\
W & V \arrow[l, "\psi"'] & \\
 & & Z \arrow[uu, dotted, "\exists!\overline{\phi}"'] \arrow[ul, "\forall\phi"] \arrow[ull, "0"]
\end{tikzcd}$$

2.15 Ćwiczenie: Kategoryjna definijcja produktu (iloczynu kartezjańskiego): Jeśli V wraz z przekształceniami π_1, π_2 spełnia warunek *dla dowolnej przestrzeni* Z *oraz przekształceń* ϕ_1, ϕ_2 *istnieje dok:ladnie jedno przekształcenie* ϕ*, takie, że* $\phi_i = \pi_i\phi$ *dla* $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd}
& V_1 & \\
Z \arrow[ur, "\forall \phi_1"] \arrow[rr, dotted, "\exists!\, \phi"] \arrow[dr, "\forall \phi_2"'] & & V \arrow[ul, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& V_2 &
\end{tikzcd}$$

wtedy $V \simeq V_1 \times V_2$.

2.16 Ćwiczenie: Sformułować definicję zewnętrznej sumy prostej (koproduktu):

$$\begin{tikzcd}
& V_1 \arrow[dl, "\forall \phi_1"'] \arrow[dr, "i_1"] & \\
Z & & V \arrow[ll, dotted, "\exists!\, \phi"'] \\
& V_2 \arrow[ul, "\forall \phi_1"] \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Pokazać, że w świecie przestrzeni liniowych zewnetrzna suma prosta jest izomorficzna z $V_1 \times V_2$, ale tak nie jest w świecie zbiorów.

3 Endomorfizmy czyli operatory liniowe [Kos roz 2], [Tor VI]

3.1 (Uzupełnienie.) Zewnętrzna suma prosta przestrzeni liniowych $\bigoplus_{i\in I} V_i$. Jeśli zbiór indeksów I jest skończony, to $\bigoplus_{i\in I} V_i \simeq \prod_{i\in I} V_i$.

3.2 End(V), czyli algebra operatorów liniowych. Algebra macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

3.3 Podprzestrzenie niezmiennicze, wektory własne, wartości własne, spektrum (widmo), przestrzeń wektorów własnych odpowiadających jednej wartości własnej.

3.4 Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $D(f) = f'$?

3.5 Przykład: jakie są wektory własne przekształcenia $D : C^\infty(S^1) \to C^\infty(S^1)$, $D^2(f) = f''$?

3.6 Przykład $M(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, wartości własne $\lambda = -1$ i $\lambda = 5$, wektory własne dla $\lambda = -1$: $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, dla $\lambda = 5$: $(1, 1, 1)$.

3.7 Równanie charakterystyczne $\det(M(\phi) - \lambda I) = 0$ i szukanie wektorów własnych.

3.8 Przykład $\phi(x, y) = (x + y, x)$ (związek z liczbami Fibonacciego).

3.9 Przykład $\phi(x, y) = (x + y, y)$, tu $\dim V_1 <$ krotność 1 w $\chi_\phi(x)$.

3.10 Przykład $\phi(x, y) = (\cos(t)x + \sin(t)y, -\sin(t)x + \cos(t)y$

3.11 Ćwiczenie z analizy: Niech $V = C^\infty(\mathbb{R})$,
a) $\phi(f) = \big((t^2-1)f'(t)\big)'$. Sprawdzić, że wielomian Legendra $P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\big((t^2-1)^n\big)$ jest wektorem własnym z wartością własną $n(n+1)$.
b) $\phi(f) = t\,f' - (1-t^2)f''$. Sprawdzić, że wielomian Czebyszewa T_n jest wektorem własnym z wartością własną n^2. (Wielomian Czebyszewa spełnia $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$.)

4 Endomorfizmy, cd.

4.1 Wielomian charakterystyczny $\chi_\phi(t) = det(M(\phi) - t\,I)$ nie zależy od wybranej bazy. Wyraz wolny a_0 to wyznacznik, wyraz a_{n-1} to ślad $tr(\phi) := tr(M(\phi))$ razy $(-1)^{n-1}$.

4.2 Dla dowolnych macierzy kwadratowych A, B mamy $tr(AB) = tr(BA)$.

4.3 Wymiar przestrzeni własnej V_λ jest miejszy bądź równy krotności λ w χ_ϕ.

4.4 Jeśli ciało jest algebraicznie domknięte, to istnieje conajmniej jedna wartość własna i wektor własny.

4.5 Jeśli n jest nieparzyste, to dla każdego przekształcenia liniowego $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ istnieje wektor własny.

4.6 Jeśli wektory α_i dla $i = 1, \dots, k$ są własne dla różnych wartości własnych, to są liniowo niezależne. W szczególności, jeśli $\chi_\phi(t)$ rozkłada się na różne czynniki liniowe, to w pewnej bazie $M(\phi)$ jest diagonalna. (Mówimy ϕ można zdiagonalizować.)

4.7 Jeśli ciało jest algbraicznie domknięte, to istnieje baza, w której $M(\phi)$ jest górnotrójkątna. (Górnotrójkątność $M(\phi)$ jest równoaważna temu, że istnieje ciąg podprzestrzeni liniowych niezmienniczych

$$0 = V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \cdots \subset V^n = V$$

takich, że $\dim V^i = i$.)

4.8 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona: $\chi_\phi(\phi) = 0$. W dowodzie korzystamy z tego, że każde ciało jest zawarte w ciele algebraicznie domkniętym.

4.9 Przestrzeń pierwiastkowa: $V_{(\lambda)} = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda\, Id)^n(v) = 0\}$. (Inna nazwa: uogólniona przestrzeń własna.)

4.10 Twierdzeinie o rozkadzie na przestrzenie pierwiastkowe. Jeśli $\chi_\phi(t)$ rozkłada się na czynniki liniowe w $\mathbb{K}$ (np. $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte), to

$$V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}.$$

4.11 Lemat o wielomianach: jeśli wielomiany $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{K}[x]$ nie mają wspólnego czynnika, to istnieją wielomiany $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{K}[x]$ takie,że $\sum g_i h_i = 1$. (Dowód algoryrmem Euklidesa)

4.12 Dowód 4.10 z lematu o wielomianach, jak w [Kos roz II §4.3].

5 Twierdzenie Jordana

5.1 Załóżmy, że $\phi : V \to V$ spełnia pewną tożsamość wielomianową $f(\phi) = 0$ (gdy $\dim(V) < \infty$ to np. $f = \chi_\phi$). Wielomian minimalny μ_ϕ jest wielomianem o najmniejszym stopniu spełniającym $\mu_\phi(\phi) = 0$. Każdy inny wielomian mający tę własność jest podzielny przez μ_ϕ. Naogół $\mu_\phi \neq \chi_\phi$, choć w μ_ϕ musi wystąpić każdy czynnik liniowy z χ_ϕ.

5.2 Rozkład $V = \bigoplus_{\lambda \in Spec(\phi)} V_{(\lambda)}$ można udowodnić także gdy $\dim V = \infty$ oraz ϕ spełnia tożsamość wielomianową i wielomian minimalny μ_ϕ rozkłada się na czynniki liniowe.

5.3 Def: $\psi \in End(V)$ jest nilpotentny jeśli $\psi^n = 0$ dla pewnego n. Jeśli przestrzeń jest skończonego wymiaru, to ten warunek jest równoważny: $V = V_{(0)}$.

5.4 Def: V jest cykliczna, jeśli V istnieje wektor $\alpha \in V$, taki, że V jest rozpęta przez $\phi^i(\alpha)$, $i \geq 0$.

5.5 Załóżmy, że ψ nilpotentny. Niech m najmniejsze, takie, że $\psi^m(\alpha) = 0$. Wtedy

$$\psi^{m-1}(\alpha), \psi^{m-2}(\alpha), \dots, \psi(\alpha), \alpha$$

są liniowo niezależne. Macierz $\psi_{|lin\{\psi^{m-1}(\alpha),\psi^{m-2}(\alpha),\dots,\psi(\alpha),\alpha\}}$ w tej bazie jest postaci Jordana z jedną klatką o wartości własnej $\lambda = 0$

5.6 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz $W \neq V$ podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje wektor własny $\beta \in V \setminus W$.

5.7 Lemat: Załóżmy, że ψ nilpotentny na V oraz W podprzestrzeń cykliczna maksymalnego wymiaru. Wtedy istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej $V = W \oplus U$.
Dow. Indukcja po $\dim(V)$: dzielimy przez $lin(\beta)$.

5.8 Wniosek: Każda przestrzeń nilpotentna rozkłada się na sumę prostą podprzestrzeni cyklicznych. Stąd dowód tw Jordana.

Twierdzenie **o postaci kanonicznej Jordana** dla endomorfizmu przestrzeni skończonego wymiaru nad ciałem algebraicznie domkniętym. [Kos roz II §4.2]

5.9 Jednoznaczność: ilość klatek Jordana nie zależy od wyboru bazy. Ilość klatek ℓ-wymiarowych z wartością własną λ jest równa $d(\ell, \lambda)$. Niech $\psi = \phi - \lambda Id$. Mamy

$$\sum_{i \geq \ell} d(i, \lambda) = \dim(\ker(\psi^\ell) - \dim(\ker(\psi^{\ell-1}).$$

5.10 Ćwiczenie

$$\mu_\phi = \prod_{\lambda \in Spec(\phi)} (x - \lambda)^{r(\lambda)},$$

gdzie $r(\lambda)$ jest rozmiarem maksymalnej klatki Jordana z wartością własną λ.

5.11 Przykład: $M(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Jedna klatka dla wartości własnej 4 rozmiaru 1 i jedna dla wartości własnej 1 rozmiaru 3.

6 Efektywne znajdowanie bazy Jordana i jednoznaczności rozkładu

6.1 Szukanie bazy Jordana: dla $\lambda \in Spec(\phi)$. Rozważamy ciąg podprzestrzeni

$$V = im(\psi^0) \supset im(\psi^1) \supset im(\psi^2) \supset \dots \supset im(\psi^{r(\lambda)-1}) \supset im(\psi^{r(\lambda)}) = im(\psi^{r(\lambda)+1}) = im(\psi^{r(\lambda)+2}) = \dots$$

Konstruujemy „łańcuszki" $\dots \mapsto \alpha_4^{(i)} \mapsto \alpha_3^{(i)} \mapsto \alpha_2^{(i)} \mapsto \alpha_1^{(i)} \mapsto 0$. Wektory $\alpha_\ell^{(i)}$ znajdujemy indukcyjnie poczynając od $im(\psi^{r(\lambda)}) \cap V_{(\lambda)} = \{0\}$. Jeśli na którymś etapie układ wektorów $\{\alpha_\ell^{(i)}\}$ nie rozpina $im(\psi^{r(\lambda)-j}) \cap V_{(\lambda)}$ to uzupełniamy go do układu rozpinającego o elementy jądra ψ.

6.2 Ćwiczenie: Obliczyć A^{2013}, gdzie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ lub $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Wynik podać w postaci $C\,D\,C^{-1}$

6.3 Ćwiczenie. Załóżmy, że operator ϕ spełnia $\phi^m = Id$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.
a) Jeśli $char(\mathbb{K}) = 0$ lub $char(\mathbb{K}) \not| \, m$ to dla każdego $\lambda \in Spec(\phi)$ mamy równość $V_{(\lambda)} = V_\lambda$ (czyli ϕ można zdiagonalizować, gdy $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte).
b) Podać przykład operatora $\phi \in End(\mathbb{F}_p^2)$ spełniającego $\phi^p = Id$ oraz $V_{(1)} \neq V_1$

6.4 Mówimy, że $\phi \in End(V)$ jest półprosty, jeśli w pewnej bazie $M(\phi)$ jest diagonalna. Dla endomorfizmu półprostego jeśli $(\phi - \lambda\,Id)^m(\alpha) = 0$ to $(\phi - \lambda\,Id)(\alpha) = 0$.

6.5 Operator półprosty ma ϕ własność: $ker(\phi) = ker(\phi^n)$ dla każdego $n \geq 1$.

6.6 Ćwiczenie: wykazać, że $\phi \in End(V)$ jest półprosty wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej $W \subset V$ istnieje niezmiennicze dopełnienie do sumy prostej $V = W \oplus U$.

6.7 (Addytywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Jeśli ϕ zapisać jako $\phi = \phi_s + \phi_n$, gdzie ϕ_s jest półprosty, a ϕ_n jest nilpotentny oraz $\phi_n\phi_s = \phi_s\phi_n$ to składniki są wyznaczone jednoznacznie.

6.8 Lemat: $ker(\phi_s - \lambda\,Id) = V_{(\lambda)}$. (Zatem ϕ_s na $V_{(\lambda)}$ musi być mnożeniem przez skalar λ.)
Dow. Niech N będzie takie, że $\phi_n^N = 0$ oraz $V_{(\lambda)} = ker((\phi - \lambda\,Id)^N)$.
Wtedy także $V_{(\lambda)} = ker((\phi - \lambda\,Id)^{2N})$.
Z przemienności $(\phi_s - \lambda\,Id)$ i ϕ_n mamy
$(\phi - \lambda\,Id)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \phi_n^k (\phi_s - \lambda\,Id)^{N-k}$.
Stąd dla $v \in ker(\phi_s - \lambda\,Id)$ mamy $(\phi - \lambda\,Id)^N(v) = 0$. Czyli $V_{(\lambda)} = ker((\phi - \lambda\,Id)^N) \subset ker(\phi_s - \lambda\,Id)$.
Z drugiej strony
$(\phi_s - \lambda\,Id)^{2N} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N}{k} (-\phi_n)^k (\phi - \lambda\,Id)^{2N-k} + \sum_{k=N}^{2N} \binom{2N}{k} (\phi - \lambda\,Id)^{2N-k} (-\phi_n)^k =$
$= \sum_{k=0}^{N-1} \binom{2N}{k} (-\phi_n)^k (\phi - \lambda\,Id)^{2N-k}$.
Dla $v \in ker((\phi - \lambda\,Id)^N)$ mamy $(\phi_s - \lambda\,Id)^{2N}(v) = 0$, czyli $ker((\phi_s - \lambda\,Id)^{2N}) \subset ker((\phi - \lambda\,Id)^N) = V_{(\lambda)}$.
Ale $ker((\phi_s - \lambda\,Id)^{2N}) = ker(\phi_s - \lambda\,Id)$.

6.9 (Multiplikatywny rozkład Jordana-Chevalleya.) Mówimy, re ψ jest unipotentny jeśli $\psi - Id$ jest nilpotentny. Załóżmy, że ϕ jest odwracalny. Jeśli ϕ zapisać jako $\phi = \phi_s\phi_u$, gdzie ϕ_s jest półprosty, a ϕ_u jest unipotentny oraz $\phi_u\phi_s = \phi_s\phi_u$ to czynniki są wyznaczone jednoznacznie.