GAL*, konspekt wykładów: Przestrzenie afiniczne

28 marca 2014

Notatki zawierają odsyłacze do podręczników [Kos]=Kostrikin, [Tor]=Toruńczyk.

Materiał mniej standardowy jest opisany dokładniej.

1 Przestrzenie Afiniczne [Kos roz. 4, §1]

1.1 Definicja przestrzeni afinicznej: (E, V, ω), gdzie E zbiór, V przestrzeń liniowa, $\omega : E \times E \to V$ odwzorowanie, które spełnia

1. $\omega(p, q) + \omega(q, r) = \omega(p, r)$

2. $\forall p \in E\ \forall \alpha \in V\ \exists! q \in E\ :\ v = \omega(p, q)$

tzn $\forall p \in E$ odwzorowanie $\omega(p, -) : E \to V$ jest bijekcją.

Przestrzeń V nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy przez TE.

1.2 Operacja $\boldsymbol{+} : E \times V \to E$.

1') $(p \boldsymbol{+} v) \boldsymbol{+} w = p \boldsymbol{+} (v + w)$ dla $p \in E$, $v, w \in V$

2') $\forall p \in E,\ V \ni v \mapsto p \boldsymbol{+} v \in E$ jest bijekcją.

1.3 Ćwiczenie: wykazać $p \boldsymbol{+} 0 = p$ i $\omega(p, q) = -\omega(q, p)$ dla $p, q \in E$.

1.4 Kombinacje afiniczne, czyli środki ciężkości (barycentry) $\sum_{i=0}^k a_i\, p_i := q \boldsymbol{+} \left(\sum_{i=0}^k a_i \omega(q, p_i)\right)$ dla $\sum_{i=1}^k a_i = 1$. Niezależność od $q \in E$.

1.5 Układy rozpinające, niezależne układy punktów, bazy punktowe.

1.6 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą E wtedy i tylko wtedy gdy $\omega(p_0, p_1), \omega(p_0, p_2) \ldots, \omega(p_0, p_n)$ jest niezależny/rozpinający/jest bazą V.

2 Podprzestrzenie afiniczne, przekształcenia

2.1 Trzy warunki równoważne

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ jest bazą punktową

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to minimalnym układem rozpinającym,

– $p_0, p_1, \ldots, p_n$ to maksymalnym układem niezależnym.

2.2 Współrzędne barycentryczne w bazie punktowej.

2.3 Ćwiczenie: Niech $a, b, c, d \in E$ taki układ, że $\omega(a, b) + \omega(c, d) = 0$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d.$$

2.4 Definicja: podzbiór $F \subset E$ jest podprzestrzenią, gdy F jest zamknięty ze względu na branie kombinacji afinicznych.

2.5 Załóżmy $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Zbiór zamknięty ze względu na dwuelementowe kombinacje afiniczne jest podprzestrzenią afiniczną.

2.6 Każda podprzestrzeń $F \subset E$ jest postaci $p + W$, gdzie W jest podprzestrzenią liniową w TE. Przestrzeń liniowa W nie zależy od wyboru $p \in F$.

2.7 Ćwiczenie: Każda podprzestrzeń afiniczna w $\mathbb{K}^n$ jest opisana niejednorodnym układem równań liniowych.

2.8 Część wspólna rodziny podprzestrzeni jest pusta lub jest podprzestrzenią.

2.9 Istnieje najmniejsza podprzestrzeń $af(A)$ zawierająca dany zbiór A. Składa się ona z kombinacji afinicznych punktów z A.

2.10 Definicja. Przekształcenie $\phi : E \to F$ jest afiniczne jeśli przeprowadza kombinacje afiniczne na kombinacje afiniczne obrazów.

2.11 Styczne przekształcenie stycznych przestrzeni liniowych $D\phi : TE \to TF$.

2.12 Przekształcenie styczne $D\phi$ i wybór $\phi(p) \in F$ dla ustalonego $p \in E$ definiuje przekształcenie afiniczne.

2.13 Wybierając $p \in E$ i $q \in F$ utożsamiamy $E \simeq TE$ i $F \simeq TF$. Wtedy

$$\text{przekształcenia afiniczne}(E, F) \simeq TF \times L(TE, TF),$$

$$\phi \quad \longleftrightarrow \quad (\omega(q, \phi(p)), D\phi).$$

2.14 Przy powyższych wyborach p i q, oraz wybierając $r \in G$, utożsamiamy $G \simeq TG$ i

$$\text{przekształcenia afiniczne}(F, G) \simeq TG \times L(TF, TG),$$

$$\text{przekształcenia afiniczne}(E, G) \simeq TG \times L(TE, TG).$$

Jeśli $w = \omega(q, \phi(p)) \in TF$, $z = \omega(r, \psi(q)) \in TG$, to złożeniu $\psi \circ \phi$ odpowiada para $(\psi(\phi(p)), D(\psi \circ \phi))$, która jest równa

$$(z + D\psi(w), D\psi \circ D\phi) \in TG \times L(TE, TG)$$

($z \in TG$, $D\psi \in L(TF, TG)$, $w \in TF$, $D\phi \in L(TE, TF)$).

2.15 Wniosek/Ćwiczenie: $D(\psi \circ \phi) = D\psi \circ D\phi$

3 Przekształcenia afiniczne c.d.

3.1 Przekształcenie afiniczne jest zadane przez wybór obrazów bazy punktowej.

3.2 Przykłady: przekształcenia liniowe $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, przesunięcia $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Każde przekształcenie afiniczne $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ jest złożeniem przekształcenia liniowego i przesunięcia.

3.3 Ćwiczenie: Jeśli Df jest izomorfizmem, to f jest izomorfizmem. Każde dwie przestrzenie tego samego wymiaru są izomorficzne.

3.4 Przeciwobraz podprzestrzeni afinicznej przy przekształceniu afinicznym jest podprzestrzenią afiniczną. Każda podprzestrzeń w $\mathbb{K}^n$ jest przeciwobrazem 0 przy pewnym przekształceniu afinicznym $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

3.5 Niezmienniki przekształceń afinicznych:
- współliniowość (koplanarność, etc) punktów
- równoległość podprzestrzeni (słaba i silna)
- proporcje podziału odcinka.

3.6 Jeśli $\dim E < \infty$ to każde równoliczne zbiory punktów w położeniu ogólnym są afinicznie równoważne (tzn. istnieje izomorfizm afiniczny E przeprowadzający jeden układ na drugi).

3.7 Twierdzenie Talesa w przestrzeni afinicznej nad ciałem: dane punkty o, a, b, c, d (nie wspóliniowe i wszystkie różne) takie, że $\omega(o,b) = \lambda\omega(o,a)$, $\omega(o,d) = \mu\omega(o,c)$. Wtedy $lin\{\omega(a,c)\} = lin\{\omega(b,d)\}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda = \mu$. Ponadto jeśli powyższy warunek zachodzi, to $\omega(b,d) = \lambda\omega(a,c)$.

3.8 Ćwiczenie. Udowodnić Twierdzenie Menelaosa: Punkty D, E i F leżą odpowiednio na prostych $af(B,C)$, $af(C,A)$ i $af(A,B)$. Wówczas punkty D, E, F są wspóliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy
$D = pB + (1-p)C$
$E = qC + (1-q)A$
$F = rA + (1-r)B$
oraz $\frac{p}{1-p} \cdot \frac{q}{1-q} \cdot \frac{r}{1-r} = -1$.

3.9 Ćwiczenie. Niech $F \subset E$, $TE = TF \oplus V$. Dany wektor $v \in V$. Przez Tr_v oznaczamy przesunięcie $Tr_v(p) = p + v$.
1) Niech $P : E \to E$ będzie rzutem na F wzdłuż V. Wykazać, że $Tr_v \circ P$ też jest rzutem.
2) Załóżmy, że $char(\mathbb{K}) \neq 2$. Niech $S : E \to E$ będzie symetrią względem F wzdłuż V. Wykazać, że $Tr_v \circ S$ też jest symetrią.

4 Zbiory wypukłe w afinicznych przestrzeniach rzeczywistych [Kos roz. 4, §3.6, roz 7, §3].

4.1 Uzupełnienie: Automorfizmy afiniczne $Aut_{Af}(E)$ czyli izomorfizmy afiniczne $E \to E$ i izomorfizmy liniowe $GL(TE) \subset L(TE, TE)$. Niech $Tr(\alpha)$ oznacza przesunięcie o wektor α. Ciąg przekształceń grup

$$TE \overset{Tr}{\hookrightarrow} Aut_{Af}(E) \overset{D}{\twoheadrightarrow} GL(TE)$$

ma własność

1) Tr jest różnowartościowe

2) D jest „na"

3) $im(Tr) = ker(D) := \{f \in Aut_{Af}(E) \mid Df = id\}$.

Mówimy, że ten ciąg jest dokładny. $Aut_{Af}(E) \simeq TE \times GL(TE)$ jako zbiory, ale nie jako grupy.

4.2 Definicja: Zbiór $A \subset E$ jest wypukły jeśli jest zamknięty ze względu na branie kombinacji afinicznych z $a_i \geq 0$.

4.3 A jest wypukły wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej pary $p, q \in A$ odcinek $\overline{pq}$ jest zawarty w A.

4.4 Przecięcie rodziny zbiorów wypukłych jest wypukłe.

4.5 Dla każdego zbioru B istnieje uwypuklenie, tzn najmniejszy wypukły zawierający B. Oznaczanie $conv(B)$.

4.6 Przykłady: półprzestrzeń, sympleks.

4.7 Twierdzenie: Każdy zbiór $A \in \mathbb{R}^m$ wypukły i domknięty, który jest różny od E, jest częścią wspólną półprzestrzeni zawierających go.

Równoważnie: dla każdego $p \notin A$ istnieje funkcja afiniczna, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, taka, że $f(p) < 0$ i $f(x) \geq 0$ dla $x \in A$.

Dowód: załóżmy, że punkt $p = 0 \notin A$, niech $q = (a_1, a_2, \ldots a_m) \in A$ punkt najbliższy p, czyli $\sum_{k=1}^m a_k^2$ minimalne. Wtedy za $f(x)$ bierzemy $\sum_{k=1}^m a_k x_k - \sum_{k=1}^m a_k^2$. Dowód, że $f(x) \geq 0$ dla $x \in A$ poprzez geometrię elementarną na płaszyźnie $af(p, q, x)$.

4.8 Przestrzeń $H^{f=0} = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ nazywa się podpierająca jeśli

$$A \subset H^{f \geq 0} = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\} \quad \text{oraz} \quad A \cap H^{f=0} \neq \emptyset \,.$$

4.9 Mówimy, że $p \in A$ jest wierzchołkiem zbioru wypukłego A gdy $p \notin Conv(A \setminus \{p\})$.

4.10 Twierdzenie: Zbiór ograniczony, domknięty i wypukły w $\mathbb{R}^m$ jest uwypukleniem swoich wierzchołków.

Dowód indukcyjny ze względu na wymiar. Dany punkt $p \in A$. Niech L dowolna prosta przechodząca przez p, $A \cap L$ jest odcinkiem $\overline{qr}$. Pokażemy, że końce tego odcinka należą do przestrzeni podpierających. Przestrzeń podpierająca $H^{f=0}$ (w punkcie q) jest konstruowana tak: Istnieje ciąg punktów $q_i \notin A$, $q_i \to q$. Niech f_i równanie przestrzeni oddzielającej q_i od A, tzn $f_i(q_i) < 0$, $f_i(x) \geq 0$, dla $x \in A$. Można założyć, że $f_i(x) = \sum_{k=1}^m a_k^i x_k + b^i$, $\sum_{k=1}^m (a_k^i)^2 = 1$. Oznaczmy przez $f_i^o(x)$ część liniową f_i. Wybierając w razie potrzeby podciąg możemy założyć, że granice $\lim_i a_k^i$ istnieją. Otrzymujemy graniczne równanie $f^o(x) = \lim_i f_i^o(x)$. Graniczne współczynniki $a_k = \lim_i a_k^i$ nie są wszystkie zerowe, bo $\sum_k (a_k)^2 = 1$. Z nierówności

$$f_i^o(q_i) + b_i < 0, \quad f_i^o(q) + b_i \geq 0 \quad \text{oraz} \quad q_i \to q$$

wnioskujemy, że ciąg b_i jest zbieżny. Równanie $f^o(x) + b = 0$ dla $b = \lim_i b^i$ opisuje przestrzeń podpierającą przechodzącą przez q. Analogicznie znajdujemy przestrzeń podpierającą $H^{g=0}$ przechodzącą przez r. Z założzenia indukcyjnego

$$p \in conv(\{q, r\}) \subset conv\left(\text{wierzchołki}(A \cap H^{f=0}) \cup \text{wierzchołki}(A \cap H^{g=0})\right) \subset conv\left(\text{wierchołki}(A)\right).$$

5 Zbiory wypukłe c.d., Przestrzenie rzutowe [Kos roz 5, §3].

5.1 Niech $A \subset \mathbb{R}^m$ będzie ograniczony, domknięty i wypukły. Niech $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ będzie funkcją afiniczną. Wtedy $sup_{p \in A} f(p) = sup_{p \in \text{wierzchołki(A)}} f(p)$.

5.2 Wielościany wypukłe (mogą być nieograniczone) $A = \{f_i(x) \geq 0 \,|\, i \in I\}$, gdzie I jest zbiorem skończonym.

5.3 Dany wielościan wypukły A. Dla $J \subset I$ zbiór $A_J = \{x \in A \mid f_i(x) = 0 \text{ dla } i \in J\}$ nazywamy ścianą.

5.4 Funkcja afiniczna nie osiąga maksimum we wnętrzu wielościanu $int(A) = \{f_i(x) > 0 \,|\, i \in I\}$.

5.5 Twierdzenie: Dana funkcja afiniczna, która osiąg-a kres na wielościanie wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje ściana tego wielościanu, na której ten kres jest osiągnięty, a funkcja na nim jest staą.

Metoda znajdowania maksimum: dla $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$, definiujemy gradient $grad(f) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Dany punkt $p \in A$. Znajdujemy takie t, że $f(q)$ dla $q = p + t\, grad(f)$ ma największą wartość. Punkt $q \in A \setminus int(A)$.

Przestrzenie rzutowe.

5.6 Przykład: jak przekształcić równanie hiperboli lub paraboli aby dostać równanie okręgu.

5.7 Przestrzeń rzutowa to zbiór prostych w $\mathbb{K}^{n+1}$. Inny opis $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, pokrycie zbiorami afinicznymi $U_i = \{x_i \neq 0\}$.

5.8 Przekształcenia rzutowe przestrzeni rzutowej: $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \mapsto [f_0(x) : f_1(x) : \cdots : f_n(x)]$, gdzie $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ oraz $f = (f_0, f_1, \ldots f_n) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ jest izomorfizmem liniowym.

5.9 Rozkład $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

5.10 Przekształcenia rzutowe przestrzeni afinicznej (nie jest wszędzie określone): $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (\frac{f_1}{f_0}, \frac{f_2}{f_0}, \ldots, \frac{f_n}{f_0})$, gdzie $f_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ są funkcjami afinicznymi (podstawiamy $x_0 = 1$ w **5.8**).

5.11 Ćwiczenie: udowodnić, że przekształcenia rzurowe zachowują współliniowość oraz dla czwórki punktów leżącch na jednej prostej $p, q, r, s \in L$ zachowany jest dwustosunek

$$\frac{x(p) - x(r)}{x(p) - x(s)} \cdot \frac{x(q) - x(s)}{x(q) - x(r)} \in \mathbb{K},$$

gdzie $x(p), x(q), x(r), x(s) \in \mathbb{K}$ są współrzednymi afinicznymi na L danych punktów.

6 Przestrzenie rzutowe (cd), Przekształcenia dwuliniowe [Kos roz.1 §4]

6.1 Ćwiczenie: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = Sfera/antypodyzm = dysk $\cup$ wtęga Möbusa.

6.2 Grupa $PGL_{n+1}(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K})/\sim$, ciąg dokładny

$$\mathbb{K}^* \hookrightarrow GL_{n+1}(\mathbb{K}) \twoheadrightarrow PGL_{n+1}(\mathbb{K})$$

6.3 Przekształcenie rzutowe $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ jest wyznaczone przez wartości na $n+2$ punktach takich, że każde $n+1$ punktów nie leży w przestrzeni rzutowej mniejszego wymiaru.

Dowód: niech $p_i = [\varepsilon_i] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dla $0 \leq i \leq n$ będzie prostą rozpiętą przez standardowy i-ty wektor bazowy $\mathbb{K}^{n+1}$ oraz $p_{n+1} = [1 : 1 : \cdots : 1]$. Dany $q_i = [w_i]$ inny układ prostych, takich, że każde $n+1$ spośród wektorów w_i są liniowo niezależne. Istnieje przekształcenie liniowe $\mathbb{K}^{n+1}$ przekształcające ε_i na w_i dla $i \leq n$. Dlatego można założyć, że $w_i = \varepsilon_i$ dla $i \leq n$. Niech $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ będą współrzędnymi wektora w_{n+1}. Przekształcenie o macierzy diagonalnej z $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na przekątnej przeprowadza $(1, 1, \ldots, 1)$ na w_{n+1}. Z dokładnością do proporcjonalności przekształcenie to jest jedyne, jeśli ma zachowywać osie w $\mathbb{K}^{n+1}$, a obraz $(1, 1, \ldots, 1)$ ma być proporcjonalny do w_{n+1}.

6.4 Podgrupa przekształceń z $PGL_{n+1}(\mathbb{K})$ zachowujących U_0 jest równa $Aut_{Af}(\mathbb{K}^n)$ przy utożsamieniu $U_0 = \mathbb{K}^n$.

6.5 Dla dowolnej hiperpowierzchni $H \subset \mathbb{K}^{n+1}$ definiunemy zbiór $U_H = \{L \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid L \not\subset H\}$. Wybór $v \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus H$ pozwala utożsamić U_H z przestrzenią afiniczną H. Różne wybory v dają utożsamienia różniące się o automorfizm afiniczny będący złożeniem homotetii (jednokładności) z przesunieciem.

Przekształcenia dwuliniowe [Kos roz.1 §4]

6.6 Przekształcenia dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$. Przykłady:
– $V \times V^* \to \mathbb{K}$,
– A algebra nad $\mathbb{K}$, mnożenie:$A \times A \to A$
  – np, $A = L(V, V)$,
  – np. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}$.
– składanie przekształceń $L(W_1, W_2) \times L(W_2, W_3) \to L(W_1, W_3)$,
– mnożenie funkcji spełniających różne warunki, np $C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$.

6.7 Przykład: Dane $1 < p < \infty$, niech ℓ^p oznacza zbiór ciągów sumowalnych w p-tej potędzie (tzn $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p < \infty$). Dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $\ell^p \times \ell^q \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\phi((a_i), (b_j)) = \sum_{i=1}^\infty a_i b_j$ (zbieżność wynika z nierówności Höldera).

6.8 Dane bazy $A = \{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,n}$ przestrzeni V_1, $B = \{\beta_j\}_{i=1,\ldots,m}$ przestrzeni V_2. Przekształcenie dwuliniowe $\phi : V_1 \times V_2 \to V_3$ wyznaczone jest przez wartości na parach wektorów bazowych $\phi(\alpha_i, \beta_j)$.

6.9 Macierz przekształcenia dwuliniowego $\phi : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$ w bazach to $M(\phi)_{A,B} \in M(n \times m, \mathbb{K})$ taka, że $(M(\phi)_{A,B})_{i,j} = \phi(\alpha_i, \beta_j)$.

6.10 Indukowane przekształcenie $\phi^{\#} : V_2 \to V_1^*$ zadane wzorem $\phi^{\#}(w) = \phi(\,\cdot\,, w)$. W bazach: $M(\phi^{\#})_B^{A^*} = M(\phi)_{A,B}$.

6.11 Jeśli $M = M(\phi)_{st,st} \in M(n \times m, \mathbb{K})$ jest macierzą $\phi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$ w bazach standardowych, to $\phi(X, Y) = X^T MY$ (wektor zapisujemy jako kolumnę).