0) Jeszcze raz policzyć $\exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$.

Wsk. Skorzystać z rozkładu $A = A_s + A_n$.

1) Niech $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \in M(2n \times 2n)$

$$Sp(2n) := \{ A \in GL_{2n} : A^T J A = J \}$$

$$sp(2n) := \{ X \in M(2n \times 2n) : X^T J + J X = 0 \}$$

Udowodnić, że $\exp(X) \in Sp(2n)$ dla $X \in sp(2n)$

2) Niech $B \in M(2n \times 2n)$

$$G_B := \{ A \in GL_{2n} : A^T B A = B \}$$

$$\mathfrak{g}_B = \{ X \in M(n \times n) : X^T B + B X = 0 \}$$

Wykazać, że $\exp(\mathfrak{g}_B) \subset G_B$ oraz, że dla $A \in G_B$ dostatecznie bliskich I mamy $A = \exp(X)$ dla $X \in \mathfrak{g}_B$.

Wsk: Rozpatrzeć najpierw przypadek gdy B jest odwracalne. Później użyć $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \in M(4n \times 4n)$.

3) Aby rozwiązać zadanie 4 z poprzedniej kartki:

a) pokazać, że $O(m,n) \cap O(m+n) = O(m) \times O(n)$

b) Używając rozkładu polarnego pokazać, że

$$O(m,n) = \left(O(m,n) \cap O(m+n) \right) \times \mathbb{R}^{??}.$$

4) Wyłącznie dla chętnych (tylko pisemnie). Pokazać, że współczynniki szeregu potęgowego $\log(e^{tA} \cdot e^{tB})$ można wyrazić za pomocą A, B i operacji komutatora.